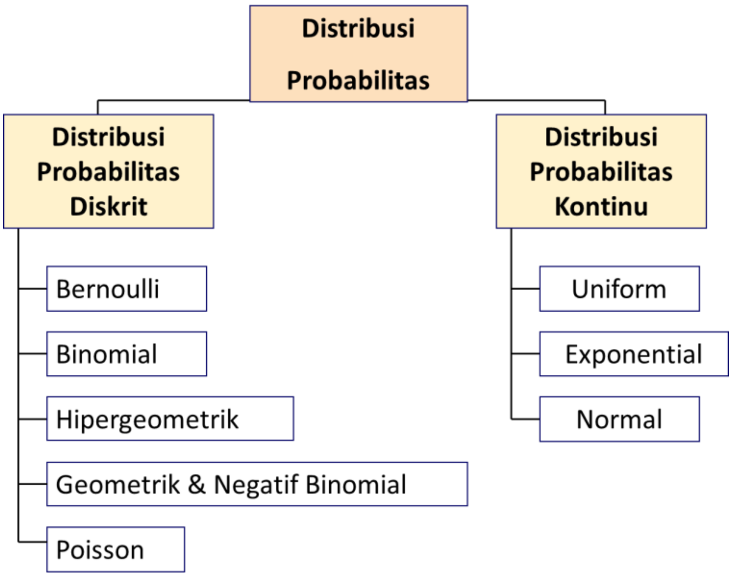
Fakultas Rekayasa Industri Telkom University

LECTURE NOTES TOPIK 9

DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

PROBABILITAS DAN STATISTIKA/III1A2

Dita Pramesti, S.Si., M.Si. (DTP)



1 • Distribusi Bernoulli

Percobaan Bernoulli adalah percobaan yang memenuhi kondisi-kondisi berikut:

1. Setiap eksperimen dengan eksperimen yang lain saling **independen**.Artinya,sebuah hasil tidak mempengaruhi muncul atau tidak munculnya hasil yang lain.
2. Setiap eksperimen hanya memberikan dua hasil yang mungkin, yaitu ***sukses**** dan ***gagal***. Kedua hasil tsb bersifat **mutually exclusive** dan **exhaustive event**
3. **Probabilitas sukses**, dilambangkan dengan ***p***, dimana peluangnya **tetap** atau konstan. **Probabilitas gagal,** dinyatakan dengan ***q***, dimana ***q = 1-p.***

Definisi :

Variabel acak X dikatakan berdistribusi Bernoulli dengan parameter *p*, dan ditulis dalam bentuk :

X ~ BIN (1, *p*)

X	1	0
P(X=x)	p	1 - p

Probability mass function (pmf) untuk distribusi Bernoulli berdasarkan tabel di atas adalah

$$P(X=x)=p(x)=\begin{cases} p & ;untuk\ x=1 \\ 1-p & ;untuk\ x=0 \\ 0 & ;untuk\ lainnya \end{cases}$$

Karakteristik Distribusi Bernoulli :

Rata-rata : $\mu = p$

Varians : $\sigma^2 = p\,(1-p)$

Beberapa distribusi yang dilandasi oleh proses Bernoulli adalah :

- Distribusi binomial,
- Distribusi geometrik, dan
- Distribusi hipergeometrik.

  (termasuk kategori tersebut adalah distribusi multinomial dan negatif binomial).

2 • Distribusi Binomial

Distribusi Binomial merupakan proses Bernoulli yang dilakukan sebanyak *n* kali percobaan.

Aplikasi Distribusi Binomial

- Hasil produksi dari proses manufakturing : cacat atau tidak
- Pada saat tender : memenangkan tender atau kalah tender
- Dalam peluncuran produk baru : sukses atau gagal
- Pada saat melamar pekerjaan: diterima atau tidak diterima

Definisi Distribusi Binomial :

Misalkan suatu percobaan Bernoulli memiliki probabilitas **sukses** yaitu *p* dan probabilitas **gagal** yaitu *q=1-p.* Maka, distribusi probabilitas binomial variabel acak X, yaitu jumlah sukses di dalam *n* percobaan adalah :

$$P(X)=b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \qquad x=0,1,2,3,\ldots,n$$

Karakteristik Distribusi Binomial

- Mean :

  $\mu = \mathrm{E}(x) = \mathrm{np}$

- Variansi

  $\sigma^2 = \mathrm{np(1\text{-}p)}$

dimana n = ukuran sampel, p = peluang sukses dan (1 – p) peluang gagal

3 • Distribusi Hipergeometrik

Distribusi Hipergeometrik sangat mirip dengan distribusi binomial.

Persamaannya:

Keduanya menyatakan probabilitas sejumlah tertentu percobaan masuk dalam kategori tertentu.

Perbedaannya:

- Binomial mengharuskan ketidakbergantungan dari satu percobaan (trial) ke percobaan berikutnya. Jadi sampling harus dilakukan dengan dikembalikan (replaced).
- Hipergeometrik tidak mengharuskan ketidakbergantungan, jadi sampling dilakukan tanpa mengembalikan *outcome* yg sudah keluar.

Definisi :

Misalkan dalam suatu populasi yang berukuran *N* terdapat *D* item cacat dan *N-D* item tidak cacat. Sebuah sampel diambil dengan ukuran sampel *n*, ternyata *x* diantaranya merupakan item cacat, maka peluang cacat pada sampel akan berdistribusi Hypergeometrik (X ~ h(x; N, n, D)) dengan fungsi peluang :

$$P(X)=h(x;\mathrm{N},n,D)=\frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x=0,1,2,3,\ldots,n$$

Keterangan :

N = ukuran populasi

D = jumlah sukses dalam populasi

N – D = jumlah gagal dalam populasi

n = ukuran sampel

x = jumlah sukses dalam sampel

n – x = jumlah gagal dalam sampel

Karakteristik :

- Mean :

$$\mu = E(x) = \frac{nD}{N}$$

- Standar Deviasi :

$$\sigma = \sqrt{\frac{nD(N-D)}{N^2}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

dimana $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ disebut “faktor koreksi populasi terbatas (finite poplation)”

Hubungan Distribusi Hipergeometrik vs Binomial :

Jikalau ukuran sampel diambil n jauh lebih kecil dari ukuran populasinya (n<N) maka distribusi hipergeometrik akan sangat mirip dengan distribusi binomial dengan:

k/N memainkan peranan probabilitas “sukses” binomial p, sehingga mean dan variansinya mengikuti distribusi binomial yaitu:

$$\mu = D\frac{n}{N} = np$$

$$\sigma^2 = npq = n\frac{D}{N}\left[1 - \frac{D}{N}\right]$$

Sebagai pedoman praktis, seringkali diterapkan jika n/N < 5% maka digunakan distribusi binomial sebagai pengganti distribusi hipergeometrik.

4 • Distribusi Geometrik dan Negatif Binomial

Percobaan pada distribusi geometrik adalah percobaan binomial yang dilakukan berulang kali hingga terjadi beberapa kali sukses. Sehingga kita bisa menentukan peluang "sukses" pertama terjadi pada percobaan ke-*k.*

Definisi :

Misalkan suatu percobaan dilakukan berulang kali dengan probabilitas sukses adalah *p* dan probabilitas gagal adalah *q=1-p*. Maka distribusi probabilitas variabel acak X, yaitu banyaknya percobaan yang telah dilakukan pada saat sukses pertama terjadi akan berdistribusi geometrik X ~ g(x;p) dengan fungsi peluang :

$$P(X) = g(x;p) = pq^{x-1} \qquad x = 0,1,2,3,\ldots$$

Karakteristik :

- Mean

$$\mu = \mathrm{E}(x) = \frac{1}{p}$$

- Standar Deviasi

$$\sigma = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$$

5 • Distribusi Poisson

Distribusi probabilitas dari variabel random Poisson X yg menyatakan banyaknya outcome dalam interval waktu tertentu t (atau daerah tertentu) dengan λ menyatakan laju terjadinya outcome persatuan waktu atau per satuan daerah diberikan oleh:

$$\boxed{P(X) = \mathrm{p}(x;\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}}$$

dengan :

X = banyaknya outcome selama percobaan

λ = rata-rata banyak outcome = λt dimana t adalah lama intervalnya dan λ adalah laju terjadinya outcome.

e = Bilangan natural (2.71828...)

μ = rata-rata dari X

Selanjutnya ditabelkan distribusi kumulatif Poisson :

$$p(x;\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \qquad \Rightarrow p(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}(\mu)^x}{x!}$$

$$P(r;\mu) = \sum_{x=0}^{r} p(x;\mu)$$

Karakteristik:

- Mean

  $\mu = \lambda t$

- Variansi

  $\sigma^2 = \lambda t$

Sifat Proses Poisson

1. Tidak punya memori atau ingatan, yaitu banyaknya outcome dalam satu interval waktu (atau daerah) tidak bergantung pada banyaknya outcome pada waktu atau daerah yg lain.
2. Probabilitas terjadinya 1 outcome dalam interval waktu (atau daerah) yg sangat pendek (kecil) sebanding dengan lama waktu interval waktu tsb (atau luas daerahnya). Dan tidak bergantung pada kejadian atau outcome di luar interval ini.
3. Probabilitas terjadinya lebih dari 1 outcome dalam interval waktu yg sangat pendek di (2) tsb sangat kecil atau bisa diabaikan.

REFERENSI

1. Ross, Sheldon.(2010), A first course in probability, 8th ed., Pearson Prentice Hall, United States of America.
2. Walpole, Ronald E., Myers, Raymond H., Myers, Sharon L. (2013), Essentials of Probability & Statistics for Engineers & Scientists, Pearson Education, United States of America.