Pengantar Metode Pembuktian Matematis Bagian 1: Bukti Langsung dan Bukti Tak Langsung dengan Kontrapositif

Kuliah Logika Matematika Semester Ganjil 2023-2024

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

November-Desember 2023

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications* (Bab 1), Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications* (Bab 4), Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2010) di Fasilkom UI oleh A. A. Krisndahi.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

Bahasan

Bahasan

1. Pengantar: Istilah Umum dan Motivasi
2. Asumsi dan Prasyarat
3. Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti
4. Bukti Langsung (Direct Proof)
5. Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Istilah Umum: Teorema, Lema, Proposisi, dan Bukti

Teorema, Lema, dan Proposisi

Teorema (*Theorem*)

Pernyataan (matematis) yang penting dan (sangat) berguna biasanya dinamakan sebagai teorema. Teorema bisa juga dikatakan sebagai suatu hasil atau fakta matematis.

Lema (*Lemma*)

Lema ("teorema kecil") merupakan suatu pernyataan yang umumnya digunakan untuk membuktikan suatu teorema (lema jarang berdiri sendiri). Lema digunakan sebagai suatu "jembatan" untuk membuktikan suatu teorema yang buktinya cukup rumit atau panjang.

Proposisi (*Proposition*)

Proposisi merupakan suatu pernyataan yang tidak sepenting teorema. Biasanya proposisi juga digunakan untuk membuktikan suatu teorema yang buktinya cukup rumit dan panjang.

Bukti Matematis

Bukti (*proof*): argumen absah yang menunjukkan kebenaran dari suatu teorema, lema, atau proposisi. Suatu bukti dapat memuat aksioma atau postulat (pernyataan yang dapat diasumsikan benar tanpa dibuktikan). Bukti diperoleh melalui aturan-aturan inferensi dari premis-premis yang ada. Suatu bukti biasanya diakhiri dengan salah satu simbol berikut: $\square$, $\blacksquare$, atau $\mathbf{Q.E.D}$.

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

"Teorema"

$1 = 2$

"Bukti"

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

"Teorema"

$1 = 2$

"Bukti"

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

"Teorema"

$1 = 2$

"Bukti"

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a.
(3)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

"Teorema"

$1 = 2$

"Bukti"

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a.
(3)	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Mengurangkan kedua ruas dari (2) dengan b^2.
(4)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

"Teorema"

$1 = 2$

"Bukti"

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a.
(3)	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Mengurangkan kedua ruas dari (2) dengan b^2.
(4)	$(a-b)(a+b) = b(a-b)$	Faktorisasi kedua ruas dari (3).
(5)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

"Teorema"

$1 = 2$

"Bukti"

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a.
(3)	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Mengurangkan kedua ruas dari (2) dengan b^2.
(4)	$(a-b)(a+b) = b(a-b)$	Faktorisasi kedua ruas dari (3).
(5)	$a + b = b$	Membagi kedua ruas dari (4) dengan $a - b$.
(6)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

"Teorema"

$1 = 2$

"Bukti"

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a.
(3)	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Mengurangkan kedua ruas dari (2) dengan b^2.
(4)	$(a-b)(a+b) = b(a-b)$	Faktorisasi kedua ruas dari (3).
(5)	$a + b = b$	Membagi kedua ruas dari (4) dengan $a - b$.
(6)	$2b = b$	Substitusi a dengan b pada (5), karena $a = b$ pada (1).
(7)		

Mengapa Perlu Mempelajari Pembuktian Matematis?

Alasan 1: agar kita tidak memberikan fakta matematis yang salah.

"Teorema"

$1 = 2$

"Bukti"

Misalkan a dan b adalah sembarang dua bilangan bulat positif yang sama, maka

	Langkah	Alasan
(1)	$a = b$	Asumsi yang diberikan.
(2)	$a^2 = ab$	Mengalikan kedua ruas dari (1) dengan a.
(3)	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Mengurangkan kedua ruas dari (2) dengan b^2.
(4)	$(a-b)(a+b) = b(a-b)$	Faktorisasi kedua ruas dari (3).
(5)	$a + b = b$	Membagi kedua ruas dari (4) dengan $a - b$.
(6)	$2b = b$	Substitusi a dengan b pada (5), karena $a = b$ pada (1).
(7)	$2 = 1$	Membagi kedua ruas dari (6) dengan b. $\square$

Alasan 2: agar kita dapat menjamin bahwa argumen yang kita berikan berlaku secara umum.

Teorema

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

"Bukti"

Alasan 2: agar kita dapat menjamin bahwa argumen yang kita berikan berlaku secara umum.

Teorema

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

"Bukti"

Ambil sembarang dua bilangan ganjil, misalkan kedua bilangan ganjil tersebut adalah a dan b. Misalkan $a = 1$ dan $b = 3$. Jelas bahwa a dan b keduanya ganjil. Kita memiliki $a + b = 1 + 3 = 4$, sehingga $a + b$ adalah bilangan genap. Jadi dari penjelasan yang diberikan terlihat bahwa jumlah sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap. $\square$

Alasan 3: agar kita mengetahui beberapa teknik-teknik pembuktian dasar yang benar dan efektif.
Alasan 4:

Alasan 3: agar kita mengetahui beberapa teknik-teknik pembuktian dasar yang benar dan efektif.
Alasan 4: karena metode pembuktian matematis digunakan lebih lanjut dalam:

Alasan 3: agar kita mengetahui beberapa teknik-teknik pembuktian dasar yang benar dan efektif.

Alasan 4: karena metode pembuktian matematis digunakan lebih lanjut dalam:

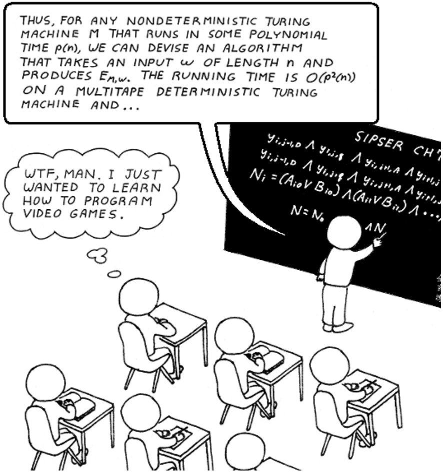
- pembuktian kebenaran suatu algoritma (*algorithm correctness*) – akan dipelajari dalam kuliah Analisis Kompleksitas Algoritma (mata kuliah wajib S1 Teknik Informatika)

Alasan 3: agar kita mengetahui beberapa teknik-teknik pembuktian dasar yang benar dan efektif.

Alasan 4: karena metode pembuktian matematis digunakan lebih lanjut dalam:

- pembuktian kebenaran suatu algoritma (*algorithm correctness*) – akan dipelajari dalam kuliah Analisis Kompleksitas Algoritma (mata kuliah wajib S1 Teknik Informatika)
- pemberian fakta yang tak terbantahkan pada suatu sistem – digunakan dalam beberapa mata kuliah pilihan seperti pada Kriptografi dan Metode Formal.

Mathematical proving in computer science...



Sumber: ABSTRUSE GOOSE.

.

Bahasan

Asumsi dan Prasyarat

Asumsi dan Prasyarat

- Pengetahuan terkait manipulasi ekspresi matematika yang diberikan di SMA.
- Sifat relasi $=$, yaitu: (1) $A = A$, (2) jika $A = B$ maka $B = A$, dan (3) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$.
- Tidak terdapat bilangan bulat antara 0 dan 1.
- Himpunan bilangan bulat tertutup terhadap operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian. Ini berarti untuk sembarang bilangan bulat a dan b, maka $a + b$, $a - b$, dan ab adalah bilangan bulat.

Bahasan

1. Pengantar: Istilah Umum dan Motivasi
2. Asumsi dan Prasyarat
3. Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti
4. Bukti Langsung (Direct Proof)
5. Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti

Meskipun teorema dan bukti matematis dapat diekspresikan menggunakan formula logika predikat, teorema dan bukti matematis (biasanya) ditulis menggunakan bahasa alami (Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, dan lain-lain).

Banyak teorema yang menyatakan bahwa suatu sifat berlaku untuk setiap elemen dari sebuah domain. Dalam teorema-teorema tersebut, kuantor universal biasanya tidak dinyatakan secara eksplisit (meskipun sering kali dibutuhkan secara formal untuk menyatakan suatu pernyataan secara tepat dan rinci). Dalam bukti dari teorema tersebut, instansiasi universal (mengambil sembarang elemen c pada suatu domain) biasanya digunakan secara implisit.

Contoh, teorema berikut:

Teorema

Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti

Meskipun teorema dan bukti matematis dapat diekspresikan menggunakan formula logika predikat, teorema dan bukti matematis (biasanya) ditulis menggunakan bahasa alami (Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, dan lain-lain).

Banyak teorema yang menyatakan bahwa suatu sifat berlaku untuk setiap elemen dari sebuah domain. Dalam teorema-teorema tersebut, kuantor universal biasanya tidak dinyatakan secara eksplisit (meskipun sering kali dibutuhkan secara formal untuk menyatakan suatu pernyataan secara tepat dan rinci). Dalam bukti dari teorema tersebut, instansiasi universal (mengambil sembarang elemen c pada suatu domain) biasanya digunakan secara implisit.

Contoh, teorema berikut:

Teorema

Jika $x > y$, dengan x dan y adalah bilangan real yang lebih dari 1, maka $x^2 > y^2$.

Sebenarnya berarti:

Teorema

Kalimat dan Penggunaan Bahasa pada Teorema dan Bukti

Meskipun teorema dan bukti matematis dapat diekspresikan menggunakan formula logika predikat, teorema dan bukti matematis (biasanya) ditulis menggunakan bahasa alami (Bahasa Indonesia, Bahasa Inggris, dan lain-lain).

Banyak teorema yang menyatakan bahwa suatu sifat berlaku untuk setiap elemen dari sebuah domain. Dalam teorema-teorema tersebut, kuantor universal biasanya tidak dinyatakan secara eksplisit (meskipun sering kali dibutuhkan secara formal untuk menyatakan suatu pernyataan secara tepat dan rinci). Dalam bukti dari teorema tersebut, instansiasi universal (mengambil sembarang elemen c pada suatu domain) biasanya digunakan secara implisit.

Contoh, teorema berikut:

Teorema

Jika $x > y$, dengan x dan y adalah bilangan real yang lebih dari 1, maka $x^2 > y^2$.

Sebenarnya berarti:

Teorema

Untuk setiap bilangan real x dan y yang lebih dari 1, jika $x > y$, maka $x^2 > y^2$.

Bahasan

Bukti Langsung (*Direct Proof*)

Bukti Langsung Sederhana

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "jika p maka q", atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.
Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

Bukti Langsung (*Direct Proof*)

Bukti Langsung Sederhana

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "jika p maka q", atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.
Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- pertama, asumsikan p **benar**;

Bukti Langsung (*Direct Proof*)

Bukti Langsung Sederhana

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "jika p maka q", atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.
Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- pertama, asumsikan p **benar**;
- konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga... q **benar**.

Bukti Langsung Berkuantor

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "untuk setiap $x \in D$, jika $P(x)$ maka $Q(x)$", atau dapat ditulis $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$.
Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

Bukti Langsung (*Direct Proof*)

Bukti Langsung Sederhana

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "jika p maka q", atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.
Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- pertama, asumsikan p **benar**;
- konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga... q **benar**.

Bukti Langsung Berkuantor

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "untuk setiap $x \in D$, jika $P(x)$ maka $Q(x)$", atau dapat ditulis $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$.
Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- ambil sembarang $c \in D$;

Bukti Langsung (*Direct Proof*)

Bukti Langsung Sederhana

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "jika p maka q", atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.
Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- pertama, asumsikan p **benar**;
- konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga... q **benar**.

Bukti Langsung Berkuantor

Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "untuk setiap $x \in D$, jika $P(x)$ maka $Q(x)$", atau dapat ditulis $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$.
Bukti langsung dari teorema tersebut dibangun dengan cara:

- ambil sembarang $c \in D$;
- asumsikan $P(c)$ **benar**, kemudian konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga... $Q(c)$ **benar**.

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan genap bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan ganjil bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2, -4, 0, dan 2020 adalah bilangan genap.

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan genap bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan ganjil bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2, -4, 0, dan 2020 adalah bilangan genap. Kita memiliki
$-2 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan genap bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan ganjil bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2, -4, 0, dan 2020 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan genap bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan ganjil bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2, -4, 0, dan 2020 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2\,(-1)$, $-4 = 2\,(-2)$, $0 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan genap bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan ganjil bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2, -4, 0, dan 2020 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2\,(-1)$, $-4 = 2\,(-2)$, $0 = 2\,(0)$, dan $2020 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan genap bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan ganjil bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2, -4, 0, dan 2020 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 = 2(0)$, dan $2020 = 2(1010)$. Kemudian bilangan -3, -7, 1, dan 2021 adalah bilangan ganjil. Kita memiliki $-3 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan genap bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan ganjil bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2, -4, 0, dan 2020 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 = 2(0)$, dan $2020 = 2(1010)$. Kemudian bilangan -3, -7, 1, dan 2021 adalah bilangan ganjil. Kita memiliki $-3 = 2(-2) + 1$, $-7 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan genap bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan ganjil bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2, -4, 0, dan 2020 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 = 2(0)$, dan $2020 = 2(1010)$. Kemudian bilangan -3, -7, 1, dan 2021 adalah bilangan ganjil. Kita memiliki $-3 = 2(-2) + 1$, $-7 = 2(-4) + 1$, $1 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan genap bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan ganjil bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2, -4, 0, dan 2020 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 = 2(0)$, dan $2020 = 2(1010)$. Kemudian bilangan -3, -7, 1, dan 2021 adalah bilangan ganjil. Kita memiliki $-3 = 2(-2) + 1$, $-7 = 2(-4) + 1$, $1 = (2)(0) + 1$, dan $2021 =$

Definisi Matematis

Definisi matematis merupakan pernyataan matematika yang menjelaskan sifat suatu objek matematika. Definisi adalah fakta yang dianggap/ diasumsikan benar.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan genap bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k$; dan n dikatakan ganjil bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $n = 2k + 1$.

Contoh

Bilangan -2, -4, 0, dan 2020 adalah bilangan genap. Kita memiliki $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $0 = 2(0)$, dan $2020 = 2(1010)$. Kemudian bilangan -3, -7, 1, dan 2021 adalah bilangan ganjil. Kita memiliki $-3 = 2(-2) + 1$, $-7 = 2(-4) + 1$, $1 = (2)(0) + 1$, dan $2021 = 2(1010) + 1$.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan kuadrat sempurna bila terdapat bilangan bulat b yang memenuhi $n = b^2$.

Contoh

Bilangan 4, 9, dan 49 adalah bilangan kuadrat sempurna. Ini karena $4 =$

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan kuadrat sempurna bila terdapat bilangan bulat b yang memenuhi $n = b^2$.

Contoh

Bilangan 4, 9, dan 49 adalah bilangan kuadrat sempurna. Ini karena $4 = 2^2$, $9 =$

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan kuadrat sempurna bila terdapat bilangan bulat b yang memenuhi $n = b^2$.

Contoh

Bilangan 4, 9, dan 49 adalah bilangan kuadrat sempurna. Ini karena $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, dan 49

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan kuadrat sempurna bila terdapat bilangan bulat b yang memenuhi $n = b^2$.

Contoh

Bilangan 4, 9, dan 49 adalah bilangan kuadrat sempurna. Ini karena $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, dan $49 = 7^2$.

Definisi

Suatu bilangan bulat n dikatakan kuadrat sempurna bila terdapat bilangan bulat b yang memenuhi $n = b^2$.

Contoh

Bilangan 4, 9, dan 49 adalah bilangan kuadrat sempurna. Ini karena $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, dan $49 = 7^2$. Bilangan 7, 8, dan 11 bukan bilangan kuadrat sempurna, karena tidak terdapat bilangan bulat a, b, dan c sehingga $7 = a^2$, $8 = b^2$, dan $11 = c^2$.

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat n.

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat n.
2. Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n =$

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat n.
2. Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k.

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat n.
2. Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k.
3. Kita memiliki $n^2 =$

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat n.
2. Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k.
3. Kita memiliki $n^2 = (2k+1)^2 =$

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat n.
2. Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k.
3. Kita memiliki $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 =$

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat n.
2. Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k.
3. Kita memiliki $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 =$

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat n.
2. Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k.
3. Kita memiliki $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 = 2\ell + 1$, untuk suatu bilangan bulat $\ell = 2k^2 + 2k$.

Contoh Bukti Langsung

Kita akan membuktikan teorema-teorema berikut.

Teorema

Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga ganjil.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat n.
2. Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k.
3. Kita memiliki $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 = 2\ell + 1$, untuk suatu bilangan bulat $\ell = 2k^2 + 2k$.
4. Jadi n^2 ganjil. $\square$

(Karena n^2 dapat ditulis sebagai $2(\cdots) + 1$.)

Teorema

Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat yang merupakan kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.

Bukti

Teorema

Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat yang merupakan kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat m dan n.

Teorema

Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat yang merupakan kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat m dan n.
2. Misalkan m dan n keduanya merupakan kuadrat sempurna, maka $m = b^2$, untuk suatu bilangan bulat b; dan $n = c^2$, untuk suatu bilangan bulat c.

Teorema

Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat yang merupakan kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat m dan n.
2. Misalkan m dan n keduanya merupakan kuadrat sempurna, maka $m = b^2$, untuk suatu bilangan bulat b; dan $n = c^2$, untuk suatu bilangan bulat c.
3. Kita memiliki $mn = b^2c^2 = (bc)^2$, untuk suatu bilangan bulat bc.

Teorema

Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat yang merupakan kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.

Bukti

1. Ambil sembarang bilangan bulat m dan n.
2. Misalkan m dan n keduanya merupakan kuadrat sempurna, maka $m = b^2$, untuk suatu bilangan bulat b; dan $n = c^2$, untuk suatu bilangan bulat c.
3. Kita memiliki $mn = b^2c^2 = (bc)^2$, untuk suatu bilangan bulat bc.
4. Jadi mn juga kuadrat sempurna. $\square$

(Karena mn dapat ditulis sebagai $(\cdots)^2$.)

Penulisan Bukti yang Rapi, Baik, dan Benar

Bukti matematis biasanya tidak ditulis per nomor langkah seperti pada contoh-contoh bukti yang telah diberikan sebelumnya. Bukti matematis biasanya ditulis dalam bentuk narasi yang terdiri dari beberapa kalimat dalam satu atau lebih paragraf. Kalimat diawali dengan huruf kapital dan diakhiri dengan tanda titik (.), kecuali bila awal kalimat merupakan simbol/ notasi matematika.

Bukti-bukti kedua teorema sebelumnya dapat ditulis menjadi:

Bukti (Jika n ganjil, maka n^2 juga ganjil.)

Bukti-bukti kedua teorema sebelumnya dapat ditulis menjadi:

Bukti (Jika n ganjil, maka n^2 juga ganjil.)

Ambil sembarang bilangan bulat n. Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k. Kita memiliki $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 = 2\ell + 1$, untuk suatu bilangan bulat $\ell = 2k^2 + 2k$. Jadi n ganjil. $\square$

Bukti (Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.)

Bukti-bukti kedua teorema sebelumnya dapat ditulis menjadi:

Bukti (Jika n ganjil, maka n^2 juga ganjil.)

Ambil sembarang bilangan bulat n. Misalkan n ganjil, maka berdasarkan definisi $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k. Kita memiliki $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 = 2\ell + 1$, untuk suatu bilangan bulat $\ell = 2k^2 + 2k$. Jadi n ganjil. $\square$

Bukti (Jika m dan n keduanya adalah bilangan bulat kuadrat sempurna, maka mn juga kuadrat sempurna.)

Ambil sembarang bilangan bulat m dan n. Misalkan m dan n keduanya merupakan kuadrat sempurna, maka $m = b^2$, untuk suatu bilangan bulat b; dan $n = c^2$, untuk suatu bilangan bulat c. Kita memiliki $mn = b^2c^2 = (bc)^2$, untuk suatu bilangan bulat bc. Jadi mn juga kuadrat sempurna. $\square$

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b. Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b. Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b. Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. □

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b. Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. □

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Ambil tiga bilangan bulat a, b, c.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b. Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Ambil tiga bilangan bulat a, b, c. Apabila $a + b$ dan $b + c$ keduanya bilangan genap, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a + b = 2k$ dan $b + c = 2\ell$.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b. Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Ambil tiga bilangan bulat a, b, c. Apabila $a + b$ dan $b + c$ keduanya bilangan genap, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a + b = 2k$ dan $b + c = 2\ell$. Tinjau bahwa $a = 2k - b$ dan $c = 2\ell - b$.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b. Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Ambil tiga bilangan bulat a, b, c. Apabila $a + b$ dan $b + c$ keduanya bilangan genap, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a + b = 2k$ dan $b + c = 2\ell$. Tinjau bahwa $a = 2k - b$ dan $c = 2\ell - b$. Akibatnya $a + c = 2k + 2\ell - 2b = 2(k + \ell - b)$.

Latihan 1

Teorema (Teorema 1.1)

Jumlah dari sembarang dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Teorema (Teorema 1.2)

Jika a, b, c adalah tiga bilangan bulat yang memenuhi $a + b$ dan $b + c$ keduanya adalah bilangan genap, maka $a + c$ juga bilangan genap.

Bukti (Bukti Teorema 1.1)

Ambil dua bilangan bulat a dan b. Apabila a dan b keduanya ganjil, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a = 2k + 1$ dan $b = 2\ell + 1$. Akibatnya $a + b = 2(k + \ell) + 2 = 2(k + \ell + 1)$. Jadi $a + b$ adalah bilangan genap. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 1.2)

Ambil tiga bilangan bulat a, b, c. Apabila $a + b$ dan $b + c$ keduanya bilangan genap, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $a + b = 2k$ dan $b + c = 2\ell$. Tinjau bahwa $a = 2k - b$ dan $c = 2\ell - b$. Akibatnya $a + c = 2k + 2\ell - 2b = 2(k + \ell - b)$. Jadi $a + c$ adalah bilangan genap. $\square$

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan rasional apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan irasional.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan rasional apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan irasional.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan q dan r adalah dua bilangan rasional,

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan rasional apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan irasional.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan q dan r adalah dua bilangan rasional, maka $q = \frac{a}{b}$ dan $r = \frac{c}{d}$ dengan a, b, c, d adalah bilangan bulat, b dan d keduanya tak nol.

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan rasional apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan irasional.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan q dan r adalah dua bilangan rasional, maka $q = \frac{a}{b}$ dan $r = \frac{c}{d}$ dengan a, b, c, d adalah bilangan bulat, b dan d keduanya tak nol. Tinjau bahwa $q + r = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, dengan $ad + bc$ dan bd keduanya adalah bilangan bulat.

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan rasional apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan irasional.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan q dan r adalah dua bilangan rasional, maka $q = \frac{a}{b}$ dan $r = \frac{c}{d}$ dengan a, b, c, d adalah bilangan bulat, b dan d keduanya tak nol. Tinjau bahwa $q + r = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, dengan $ad + bc$ dan bd keduanya adalah bilangan bulat. Karena b dan d keduanya tak nol, maka $bd \neq 0$.

Latihan 2

Definisi

Suatu bilangan real r dikatakan rasional apabila terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ yang memenuhi $r = \frac{a}{b}$. Bilangan real yang tidak rasional dinamakan bilangan irasional.

Teorema (Teorema 2)

Jumlah dari dua bilangan rasional juga bilangan rasional.

Bukti (Bukti Teorema 2)

Misalkan q dan r adalah dua bilangan rasional, maka $q = \frac{a}{b}$ dan $r = \frac{c}{d}$ dengan a, b, c, d adalah bilangan bulat, b dan d keduanya tak nol. Tinjau bahwa $q + r = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, dengan $ad + bc$ dan bd keduanya adalah bilangan bulat. Karena b dan d keduanya tak nol, maka $bd \neq 0$. Jadi $q + r$ adalah bilangan rasional. $\square$

Bahasan

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti (?)

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti (?)

Karena n^2 ganjil, maka $n^2 = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k.

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti (?)

Karena n^2 ganjil, maka $n^2 = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k. Dapat diperoleh $n = \pm\sqrt{2k+1}$.

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti (?)

Karena n^2 ganjil, maka $n^2 = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k. Dapat diperoleh $n = \pm\sqrt{2k+1}$. Selanjutnya???

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti (?)

Karena n^2 ganjil, maka $n^2 = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k. Dapat diperoleh $n = \pm\sqrt{2k+1}$. Selanjutnya???

Metode pembuktian dengan bukti langsung tidak dapat digunakan untuk membuktikan teorema di atas.

Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "jika p maka q", atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.

Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "jika p maka q", atau dapat ditulis $p \longrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \longrightarrow q$ ekuivalen dengan $\neg q \longrightarrow \neg p$. Jadi untuk membuktikan bahwa $p \longrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa

Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "jika p maka q", atau dapat ditulis $p \rightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan $\neg q \rightarrow \neg p$. Jadi untuk membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $\neg q \rightarrow \neg p$ berlaku.

Bukti tak langsung dengan kontraposisi $p \rightarrow q$ setara dengan bukti langsung dari $\neg q \rightarrow \neg p$, yang dibangun dengan cara:

Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "jika p maka q", atau dapat ditulis $p \longrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \longrightarrow q$ ekuivalen dengan $\neg q \longrightarrow \neg p$. Jadi untuk membuktikan bahwa $p \longrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $\neg q \longrightarrow \neg p$ berlaku.

Bukti tak langsung dengan kontraposisi $p \longrightarrow q$ setara dengan bukti langsung dari $\neg q \longrightarrow \neg p$, yang dibangun dengan cara:

- pertama asumsikan $\neg q$ **benar**;

Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "jika p maka q", atau dapat ditulis $p \longrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \longrightarrow q$ ekuivalen dengan $\neg q \longrightarrow \neg p$. Jadi untuk membuktikan bahwa $p \longrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $\neg q \longrightarrow \neg p$ berlaku.

Bukti tak langsung dengan kontraposisi $p \longrightarrow q$ setara dengan bukti langsung dari $\neg q \longrightarrow \neg p$, yang dibangun dengan cara:

- pertama asumsikan $\neg q$ **benar**;
- konstruksi pernyataan-peryataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga... $\neg p$ **benar**.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah:

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai:

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai: jika n genap, maka n^2 genap.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai: jika n genap, maka n^2 genap. Misalkan n genap,

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai: jika n genap, maka n^2 genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai: jika n genap, maka n^2 genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\left(2k^2\right)$.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontraposisi

Teorema

Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika n^2 ganjil, maka n ganjil.

Bukti

Perhatikan bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n tidak ganjil, maka n^2 tidak ganjil. Karena untuk setiap bilangan bulat n berlaku n genap atau n ganjil tetapi tidak keduanya, maka kontraposisi dari pernyataan di atas dapat ditulis sebagai: jika n genap, maka n^2 genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\left(2k^2\right)$. Jadi n^2 genap. $\square$

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah:

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n+2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n+2$ genap.

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap,

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k.

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n+2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n+2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya $3n+2 = 3(2k)+2 = 2(3k+1)$.

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n+2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n+2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya $3n+2 = 3(2k)+2 = 2(3k+1)$. Jadi $3n+2$ genap. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n+2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n+2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya $3n+2 = 3(2k)+2 = 2(3k+1)$. Jadi $3n+2$ genap. □

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah:

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n+2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n+2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya $3n+2 = 3(2k)+2 = 2(3k+1)$. Jadi $3n+2$ genap. □

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika a, b, n bilangan bulat dengan

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$. Jadi $3n + 2$ genap. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika a, b, n bilangan bulat dengan $a > \sqrt{n}$ **dan** $b > \sqrt{n}$, maka $n \neq ab$.

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n + 2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n + 2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$. Jadi $3n + 2$ genap. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika a, b, n bilangan bulat dengan $a > \sqrt{n}$ **dan** $b > \sqrt{n}$, maka $n \neq ab$. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dengan $a > \sqrt{n}$ dan $b > \sqrt{n}$, maka $ab > (\sqrt{n})^2 = n$, yang berarti $ab > n$.

Latihan 3

Teorema (Teorema 3.1)

Apabila n adalah bilangan bulat dan $3n+2$ ganjil, maka n ganjil.

Teorema (Teorema 3.2)

Apabila a, b, dan n semuanya adalah bilangan bulat positif dengan $n = ab$, maka $a \leq \sqrt{n}$ atau $b \leq \sqrt{n}$.

Bukti (Bukti Teorema 3.1)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika n genap, maka $3n+2$ genap. Misalkan n genap, maka $n = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya $3n+2 = 3(2k)+2 = 2(3k+1)$. Jadi $3n+2$ genap. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 3.2)

Tinjau bahwa kontraposisi dari pernyataan di atas adalah: jika a, b, n bilangan bulat dengan $a > \sqrt{n}$ **dan** $b > \sqrt{n}$, maka $n \neq ab$. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dengan $a > \sqrt{n}$ dan $b > \sqrt{n}$, maka $ab > (\sqrt{n})^2 = n$, yang berarti $ab > n$. Jadi $ab \neq n$. $\square$