# Dasar Teori Graf (Bagian 2)

## Isomorfisma, Keterhubungan, serta Lintasan Euler dan Lintasan Hamilton


MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U


Mei 2023

# Acknowledgements

*Slide* ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications*, Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Mathematics for Computer Science*. MIT, 2010, oleh E. Lehman, F. T. Leighton, A. R. Meyer.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 2 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
5. Slide kuliah Matematika Diskret 2 di Fasilkom UI oleh Tim Dosen.
6. *Slide* kuliah Matematika Diskrit di Telkom University oleh B. Purnama dan rekan-rekan.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

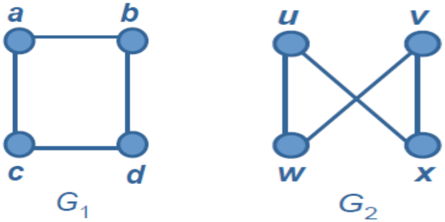
# Bahasan

1. Isomorfisma Graf
   - Mengenali Graf yang Isomorfik
   - Mengenali Graf yang Isomorfik Via Matriks Ketetanggaan
   - Lebih Jauh Tentang Isomorfisma Graf
   - Latihan: Menentukan Isomorfisma Graf
2. Keterhubungan (Connectivity)
   - Lintasan dan Sirkuit
   - Definisi Terhubung (Connected) dan Keterhubungan (Connectivity)
   - Menghitung Banyaknya Lintasan Antar Dua Simpul
3. Lintasan dan Sirkuit Euler
4. Lintasan dan Sirkuit Hamilton

# Bahasan

# Isomorfisma Graf: Motivasi

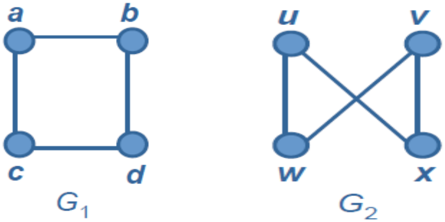
Perhatikan dua graf berikut:




Apakah $G_1$ dan $G_2$ sama?

# Isomorfisma Graf: Motivasi

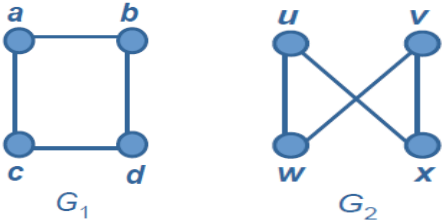
Perhatikan dua graf berikut:




Apakah $G_1$ dan $G_2$ sama? Tidak, karena $V_{G_1} = \{a, b, c, d\} \neq \{u, v, w, x\} = V_{G_2}$.
Apakah $G_2$ dapat digambar ulang sedemikian hingga $G_1$ "serupa" dengan $G_2$?

# Isomorfisma Graf: Motivasi

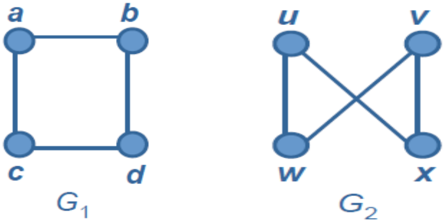
Perhatikan dua graf berikut:



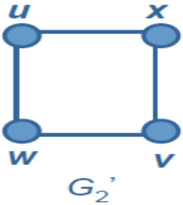

Apakah $G_1$ dan $G_2$ sama? Tidak, karena $V_{G_1} = \{a, b, c, d\} \neq \{u, v, w, x\} = V_{G_2}$.
Apakah $G_2$ dapat digambar ulang sedemikian hingga $G_1$ "serupa" dengan $G_2$? Ya.

# Isomorfisma Graf: Motivasi

Perhatikan dua graf berikut:




Apakah $G_1$ dan $G_2$ sama? Tidak, karena $V_{G_1} = \{a, b, c, d\} \neq \{u, v, w, x\} = V_{G_2}$.
Apakah $G_2$ dapat digambar ulang sedemikian hingga $G_1$ "serupa" dengan $G_2$? Ya.



# Isomorfisma Graf: Definisi

Secara informal, dua graf $G_1$ dan $G_2$ dikatakan isomorfik apabila graf $G_2$ dapat digambar ulang sedemikian hingga $G_2$ serupa (mirip) dengan $G_1$, atau sebaliknya ($G_1$ mirip dengan $G_2$).

# Isomorfisma Graf: Definisi

Secara informal, dua graf $G_1$ dan $G_2$ dikatakan isomorfik apabila graf $G_2$ dapat digambar ulang sedemikian hingga $G_2$ serupa (mirip) dengan $G_1$, atau sebaliknya ($G_1$ mirip dengan $G_2$).

Isomorfisma graf yang dikaji pada kuliah ini hanya melibatkan graf (bisa berarah atau tidak) yang tidak memuat sisi ganda.

## Definisi

# Isomorfisma Graf: Definisi

Secara informal, dua graf $G_1$ dan $G_2$ dikatakan isomorfik apabila graf $G_2$ dapat digambar ulang sedemikian hingga $G_2$ serupa (mirip) dengan $G_1$, atau sebaliknya ($G_1$ mirip dengan $G_2$).
Isomorfisma graf yang dikaji pada kuliah ini hanya melibatkan graf (bisa berarah atau tidak) yang tidak memuat sisi ganda.

## Definisi

Diberikan dua graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ yang keduanya tidak memuat sisi ganda, $G_1$ dan $G_2$ dikatakan isomorfik, ditulis $G_1 \cong G_2$, apabila terdapat fungsi total injektif $f : V_1 \to V_2$ dengan sifat

$$\{a, b\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{f(a), f(b)\} \in E_2 \text{ (untuk graf tak berarah)}$$
$$(a, b) \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad (f(a), f(b)) \in E_2 \text{ (untuk graf berarah).}$$

Fungsi total $f$ selanjutnya disebut sebagai isomorfisma (atau isomorfisme).

# Isomorfisma Graf: Definisi

Secara informal, dua graf $G_1$ dan $G_2$ dikatakan isomorfik apabila graf $G_2$ dapat digambar ulang sedemikian hingga $G_2$ serupa (mirip) dengan $G_1$, atau sebaliknya ($G_1$ mirip dengan $G_2$).
Isomorfisma graf yang dikaji pada kuliah ini hanya melibatkan graf (bisa berarah atau tidak) yang tidak memuat sisi ganda.

## Definisi

Diberikan dua graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ yang keduanya tidak memuat sisi ganda, $G_1$ dan $G_2$ dikatakan isomorfik, ditulis $G_1 \cong G_2$, apabila terdapat fungsi total injektif $f : V_1 \to V_2$ dengan sifat

$$\{a, b\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{f(a), f(b)\} \in E_2 \text{ (untuk graf tak berarah)}$$
$$(a, b) \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad (f(a), f(b)) \in E_2 \text{ (untuk graf berarah).}$$

Fungsi total $f$ selanjutnya disebut sebagai isomorfisma (atau isomorfisme).

Jadi, dua graf dikatakan isomorfik apabila terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul pada kedua graf tersebut yang mempertahankan ketetanggaan.

# Sifat-sifat Dua Graf yang Isomorfik

**Teorema**

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_1, E_2)$ adalah dua graf yang isomorfik (dengan isomorfisma $f$), maka

1. $|V_1| = |V_2|$ dan $|E_1| = |E_2|$,
2. untuk setiap $a \in V_1$ berlaku $\deg(a) = \deg(f(a))$.

Artinya dua graf $G_1$ dan $G_2$ yang isomorfik memiliki ciri-ciri:

# Sifat-sifat Dua Graf yang Isomorfik

## Teorema

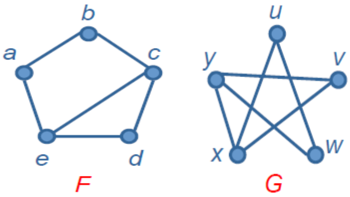
Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_1, E_2)$ adalah dua graf yang isomorfik (dengan isomorfisma $f$), maka

1. $|V_1| = |V_2|$ dan $|E_1| = |E_2|$,
2. untuk setiap $a \in V_1$ berlaku $\deg(a) = \deg(f(a))$.

Artinya dua graf $G_1$ dan $G_2$ yang isomorfik memiliki ciri-ciri:

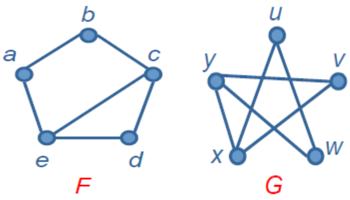
1. Banyaknya simpul pada $G_1$ sama dengan banyaknya simpul pada $G_2$.
2. Banyaknya sisi pada $G_1$ sama dengan banyaknya sisi pada $G_2$.
3. Derajat masing-masing simpul yang saling berkorespondensi pada kedua graf tersebut sama.

# Mengenali Graf yang Isomorfik



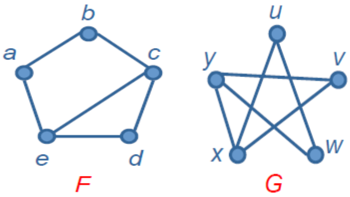

Apakah $F$ dan $G$ isomorfik?

# Mengenali Graf yang Isomorfik



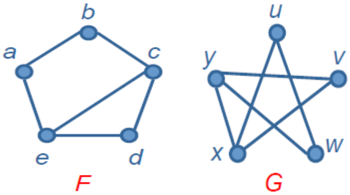

Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| =$

# Mengenali Graf yang Isomorfik



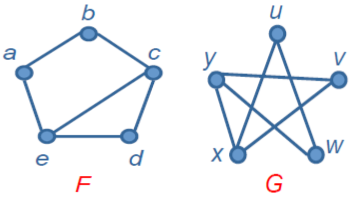

Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| =$

# Mengenali Graf yang Isomorfik



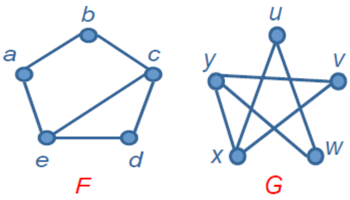

Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$.

# Mengenali Graf yang Isomorfik



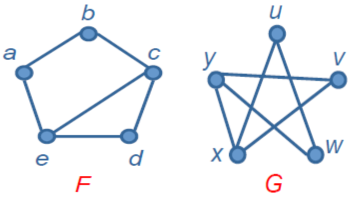

Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik.

# Mengenali Graf yang Isomorfik



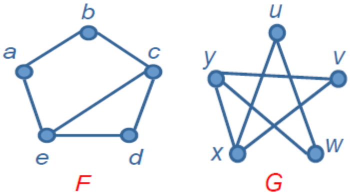

Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma:

# Mengenali Graf yang Isomorfik




Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$.

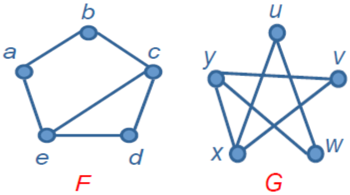
# Mengenali Graf yang Isomorfik




Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:

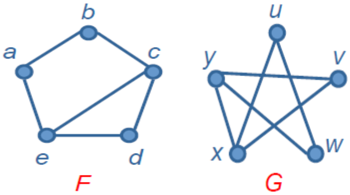
$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow$

# Mengenali Graf yang Isomorfik




Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:
$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} = \{u, w\} \in E_G$,

# Mengenali Graf yang Isomorfik

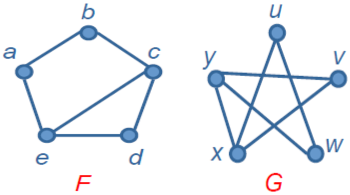



Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:

$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} = \{u, w\} \in E_G$,

$\{b, c\} \in E_F \Leftrightarrow$

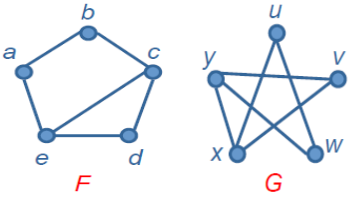
# Mengenali Graf yang Isomorfik




Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:

$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} = \{u, w\} \in E_G$,
$\{b, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(b), f(c)\} = \{w, y\} \in E_G$,

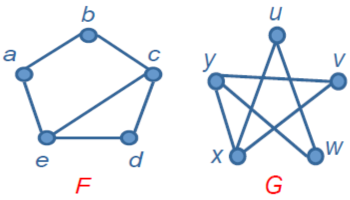
# Mengenali Graf yang Isomorfik




Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:

$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} = \{u, w\} \in E_G$,
$\{b, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(b), f(c)\} = \{w, y\} \in E_G$,
$\{c, d\} \in E_F \Leftrightarrow$

# Mengenali Graf yang Isomorfik



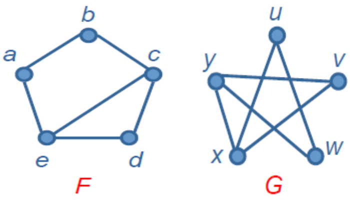

Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:

$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} = \{u, w\} \in E_G$,

$\{b, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(b), f(c)\} = \{w, y\} \in E_G$,

$\{c, d\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(c), f(d)\} = \{y, v\} \in E_G$,

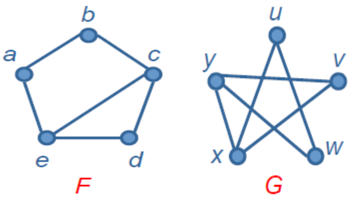
# Mengenali Graf yang Isomorfik




Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:

$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} = \{u, w\} \in E_G$,
$\{b, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(b), f(c)\} = \{w, y\} \in E_G$,
$\{c, d\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(c), f(d)\} = \{y, v\} \in E_G$,
$\{d, e\} \in E_F \Leftrightarrow$

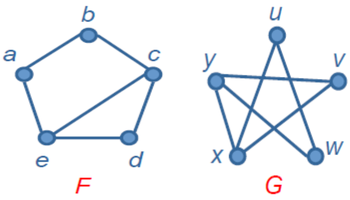
# Mengenali Graf yang Isomorfik




Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:

$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} = \{u, w\} \in E_G$,
$\{b, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(b), f(c)\} = \{w, y\} \in E_G$,
$\{c, d\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(c), f(d)\} = \{y, v\} \in E_G$,
$\{d, e\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(d), f(e)\} = \{v, x\} \in E_G$,

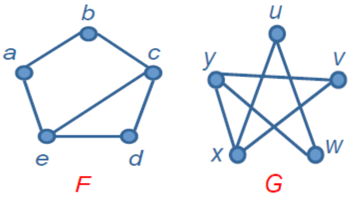
# Mengenali Graf yang Isomorfik




Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:

$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} = \{u, w\} \in E_G$,
$\{b, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(b), f(c)\} = \{w, y\} \in E_G$,
$\{c, d\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(c), f(d)\} = \{y, v\} \in E_G$,
$\{d, e\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(d), f(e)\} = \{v, x\} \in E_G$,
$\{e, c\} \in E_F \Leftrightarrow$

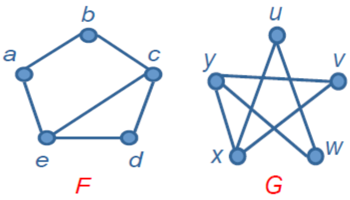
# Mengenali Graf yang Isomorfik




Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:

$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} = \{u, w\} \in E_G$,
$\{b, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(b), f(c)\} = \{w, y\} \in E_G$,
$\{c, d\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(c), f(d)\} = \{y, v\} \in E_G$,
$\{d, e\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(d), f(e)\} = \{v, x\} \in E_G$,
$\{e, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(e), f(c)\} = \{x, y\} \in E_G$,

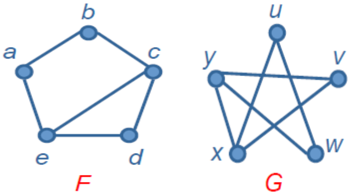
# Mengenali Graf yang Isomorfik




Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:

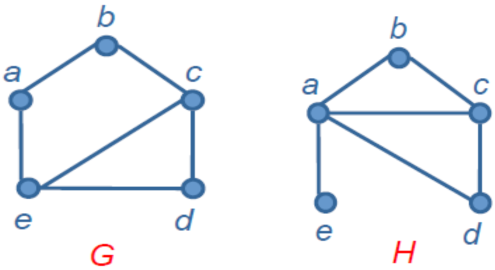
$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} = \{u, w\} \in E_G$,
$\{b, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(b), f(c)\} = \{w, y\} \in E_G$,
$\{c, d\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(c), f(d)\} = \{y, v\} \in E_G$,
$\{d, e\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(d), f(e)\} = \{v, x\} \in E_G$,
$\{e, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(e), f(c)\} = \{x, y\} \in E_G$,
$\{e, a\} \in E_F \Leftrightarrow$

# Mengenali Graf yang Isomorfik

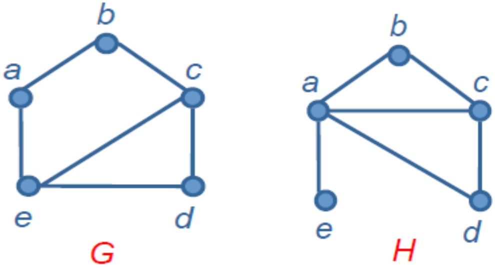



Apakah $F$ dan $G$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_F| = |V_G| = 5$ dan $|E_F| = |E_G| = 6$. Jadi $F$ dan $G$ berpotensi isomorfik. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_F \to V_G$ berikut adalah isomorfisma: $f(a) = u$, $f(b) = w$, $f(c) = y$, $f(d) = v$, $f(e) = x$. Kita memiliki:

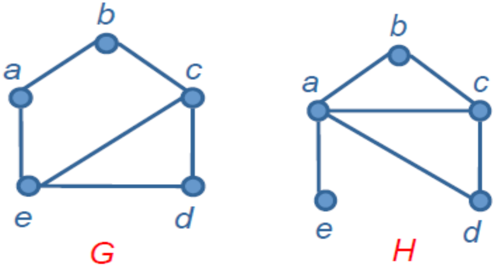
$\{a, b\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} = \{u, w\} \in E_G$,
$\{b, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(b), f(c)\} = \{w, y\} \in E_G$,
$\{c, d\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(c), f(d)\} = \{y, v\} \in E_G$,
$\{d, e\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(d), f(e)\} = \{v, x\} \in E_G$,
$\{e, c\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(e), f(c)\} = \{x, y\} \in E_G$,
$\{e, a\} \in E_F \Leftrightarrow \{f(e), f(a)\} = \{x, u\} \in E_G$.



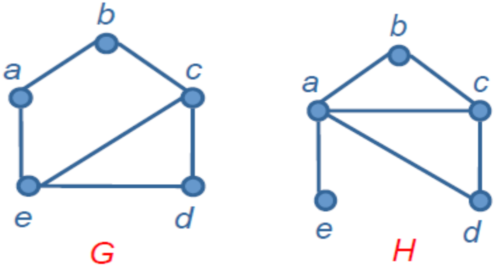

Apakah $G$ dan $H$ isomorfik?



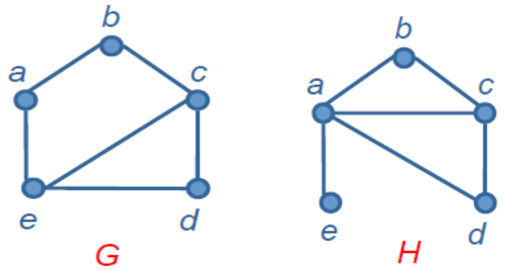

Apakah $G$ dan $H$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_G| = |V_H| =$



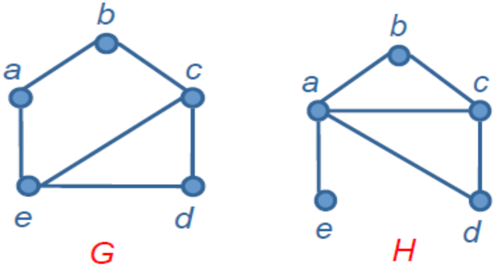

Apakah $G$ dan $H$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_G| = |V_H| = 5$ dan $|E_G| = |E_H| =$




Apakah $G$ dan $H$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_G| = |V_H| = 5$ dan $|E_G| = |E_H| = 6$.

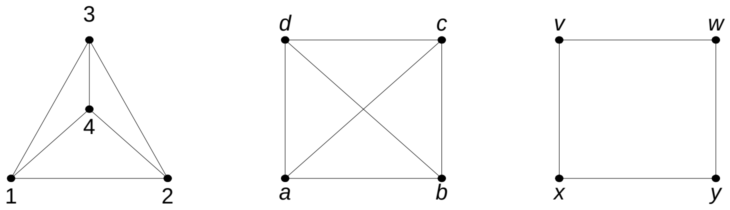



Apakah $G$ dan $H$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_G| = |V_H| = 5$ dan $|E_G| = |E_H| = 6$. Namun perhatikan bahwa pada $H$ terdapat simpul $e$ yang berderajat $1$, sedangkan pada $G$ tidak terdapat satu pun simpul yang berderajat $1$. Lebih lanjut, pada $H$ ada simpul $a$ yang berderajat $4$, sedangkat pada $G$ tidak ada satupun simpul yang berderajat $4$.



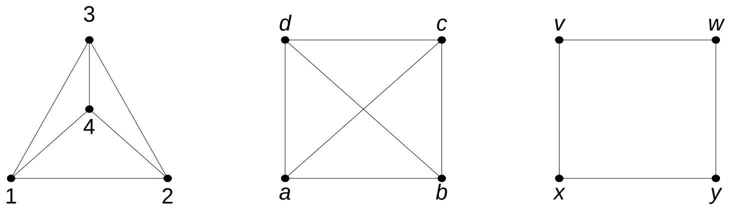

Apakah $G$ dan $H$ isomorfik? Tinjau bahwa $|V_G| = |V_H| = 5$ dan $|E_G| = |E_H| = 6$. Namun perhatikan bahwa pada $H$ terdapat simpul $e$ yang berderajat $1$, sedangkan pada $G$ tidak terdapat satu pun simpul yang berderajat $1$. Lebih lanjut, pada $H$ ada simpul $a$ yang berderajat $4$, sedangkat pada $G$ tidak ada satupun simpul yang berderajat $4$. Akibatnya $G \ncong H$.

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ berturut-turut (dari kiri ke kanan) adalah graf-graf berikut.



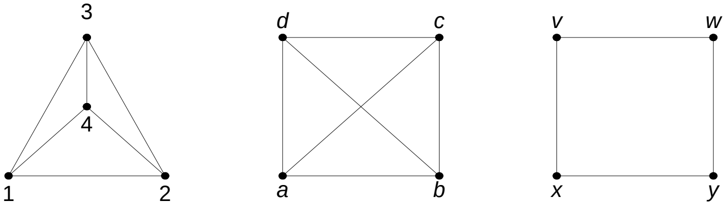

Kita memiliki

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ berturut-turut (dari kiri ke kanan) adalah graf-graf berikut.



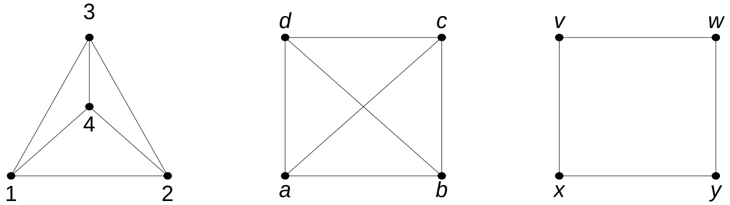

Kita memiliki $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 4$,

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ berturut-turut (dari kiri ke kanan) adalah graf-graf berikut.



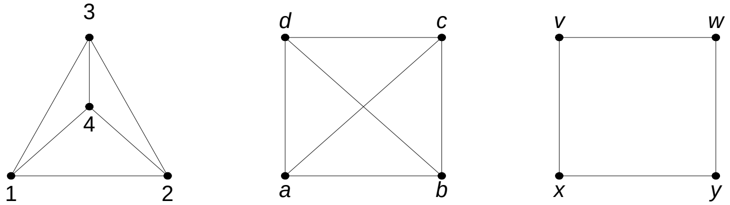

Kita memiliki $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 4$, $|E_1| = |E_2| = 6$, $|E_3| = 4$,

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ berturut-turut (dari kiri ke kanan) adalah graf-graf berikut.



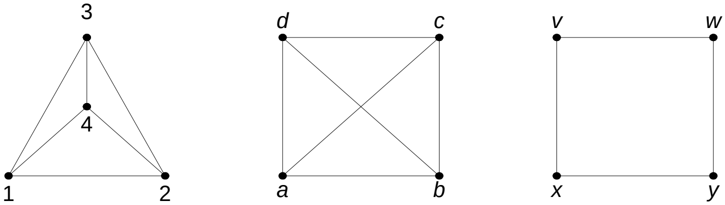

Kita memiliki $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 4$, $|E_1| = |E_2| = 6$, $|E_3| = 4$, jadi $G_1$ berpotensi isomorfik dengan $G_2$, namun jelas bahwa $G_1 \ncong G_3$ dan $G_2 \ncong G_3$. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_{E_1} \to V_{E_2}$ berikut adalah isomorfisma: $f(1) =$

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ berturut-turut (dari kiri ke kanan) adalah graf-graf berikut.



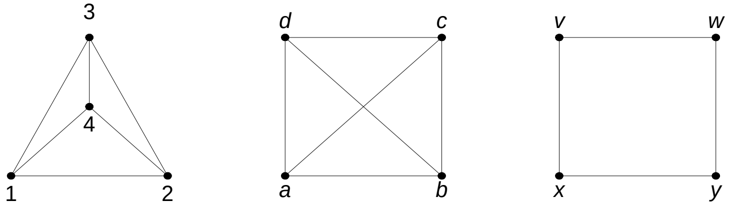

Kita memiliki $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 4$, $|E_1| = |E_2| = 6$, $|E_3| = 4$, jadi $G_1$ berpotensi isomorfik dengan $G_2$, namun jelas bahwa $G_1 \ncong G_3$ dan $G_2 \ncong G_3$. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_{E_1} \to V_{E_2}$ berikut adalah isomorfisma: $f(1) = a$, $f(2) =$

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ berturut-turut (dari kiri ke kanan) adalah graf-graf berikut.



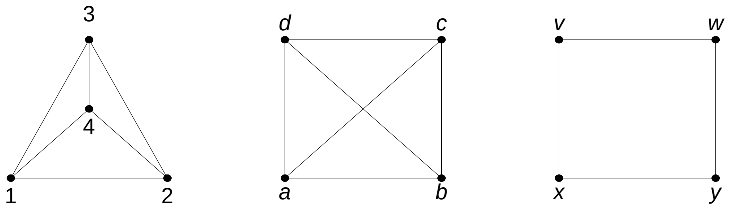

Kita memiliki $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 4$, $|E_1| = |E_2| = 6$, $|E_3| = 4$, jadi $G_1$ berpotensi isomorfik dengan $G_2$, namun jelas bahwa $G_1 \ncong G_3$ dan $G_2 \ncong G_3$. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_{E_1} \to V_{E_2}$ berikut adalah isomorfisma: $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) =$

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ berturut-turut (dari kiri ke kanan) adalah graf-graf berikut.



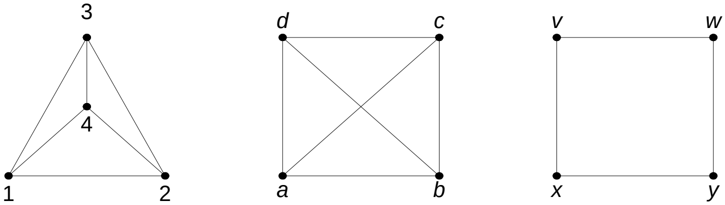

Kita memiliki $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 4$, $|E_1| = |E_2| = 6$, $|E_3| = 4$, jadi $G_1$ berpotensi isomorfik dengan $G_2$, namun jelas bahwa $G_1 \ncong G_3$ dan $G_2 \ncong G_3$. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_{E_1} \to V_{E_2}$ berikut adalah isomorfisma: $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) =$

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ berturut-turut (dari kiri ke kanan) adalah graf-graf berikut.




Kita memiliki $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 4$, $|E_1| = |E_2| = 6$, $|E_3| = 4$, jadi $G_1$ berpotensi isomorfik dengan $G_2$, namun jelas bahwa $G_1 \ncong G_3$ dan $G_2 \ncong G_3$. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_{E_1} \to V_{E_2}$ berikut adalah isomorfisma: $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$. Kita memiliki

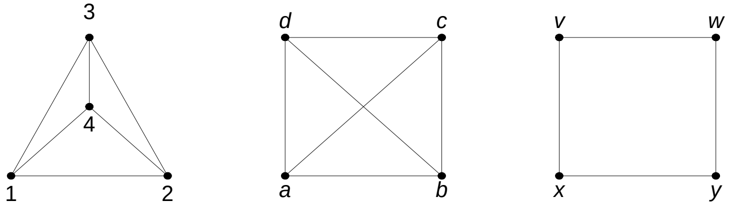
Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ berturut-turut (dari kiri ke kanan) adalah graf-graf berikut.




Kita memiliki $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 4$, $|E_1| = |E_2| = 6$, $|E_3| = 4$, jadi $G_1$ berpotensi isomorfik dengan $G_2$, namun jelas bahwa $G_1 \ncong G_3$ dan $G_2 \ncong G_3$. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_{E_1} \to V_{E_2}$ berikut adalah isomorfisma: $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$. Kita memiliki

- $\{1,2\} \in E_1 \Leftrightarrow \{a,b\} \in E_2$, $\{1,3\} \in E_1 \Leftrightarrow \{a,c\} \in E_2$, $\{1,4\} \in E_1 \Leftrightarrow \{a,d\} \in E_2$.

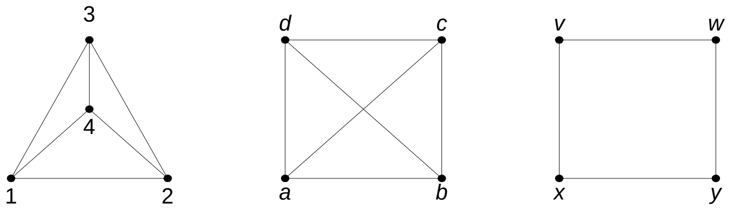
Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ berturut-turut (dari kiri ke kanan) adalah graf-graf berikut.




Kita memiliki $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 4$, $|E_1| = |E_2| = 6$, $|E_3| = 4$, jadi $G_1$ berpotensi isomorfik dengan $G_2$, namun jelas bahwa $G_1 \ncong G_3$ dan $G_2 \ncong G_3$. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_{E_1} \to V_{E_2}$ berikut adalah isomorfisma: $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$. Kita memiliki

- $\{1,2\} \in E_1 \Leftrightarrow \{a,b\} \in E_2$, $\{1,3\} \in E_1 \Leftrightarrow \{a,c\} \in E_2$, $\{1,4\} \in E_1 \Leftrightarrow \{a,d\} \in E_2$.
- $\{2,3\} \in E_1 \Leftrightarrow \{b,c\} \in E_2$, $\{2,4\} \in E_1 \Leftrightarrow \{b,d\} \in E_2$.

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ berturut-turut (dari kiri ke kanan) adalah graf-graf berikut.

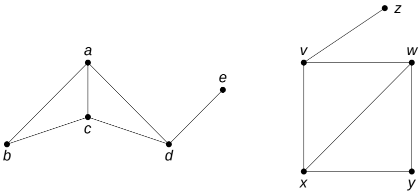



Kita memiliki $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 4$, $|E_1| = |E_2| = 6$, $|E_3| = 4$, jadi $G_1$ berpotensi isomorfik dengan $G_2$, namun jelas bahwa $G_1 \ncong G_3$ dan $G_2 \ncong G_3$. Kemudian perhatikan bahwa pemetaan $f : V_{E_1} \to V_{E_2}$ berikut adalah isomorfisma: $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$. Kita memiliki

- $\{1,2\} \in E_1 \Leftrightarrow \{a,b\} \in E_2$, $\{1,3\} \in E_1 \Leftrightarrow \{a,c\} \in E_2$, $\{1,4\} \in E_1 \Leftrightarrow \{a,d\} \in E_2$.
- $\{2,3\} \in E_1 \Leftrightarrow \{b,c\} \in E_2$, $\{2,4\} \in E_1 \Leftrightarrow \{b,d\} \in E_2$.
- $\{3,4\} \in E_1 \Leftrightarrow \{c,d\} \in E_2$.

# Mengenali Graf yang Isomorfik Via Matriks Ketetanggaan

Misalkan $G$ dan $H$ adalah dua graf berikut (berturut-turut dari kiri ke kanan).




Untuk memeriksa apakah $G \cong H$, kita dapat membentuk matriks ketetanggaan untuk masing-masing graf, yaitu $\mathbf{A}_G$ dan $\mathbf{A}_H$, dan melihat apakah baris dan kolom $\mathbf{A}_H$ dapat dipermutasikan sehingga $\mathbf{A}_H = \mathbf{A}_G$.

Kita memiliki

$$\mathbf{A}_G \quad =$$

Kita memiliki

$$\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan $\mathbf{A}_H =$

Kita memiliki

$$\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{dan } \mathbf{A}_H = \begin{array}{c} \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v & w & x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \mathbf{A}_H =$$

Kita memiliki

$$\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{dan } \mathbf{A}_H = \begin{array}{c} \\ v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v & w & x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{A}_H = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ w \\ v \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & w & v & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

fungsi

Kita memiliki

$$\mathbf{A}_G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan $\mathbf{A}_H = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v & w & x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$, $\mathbf{A}_H = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} x & y & w & v & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ w \\ v \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$,

fungsi $f(a) = x$, $f(b) = y$, $f(c) = w$, $f(d) = v$, dan $f(e) = z$ adalah sebuah isomorfisma, sehingga $G \cong H$.

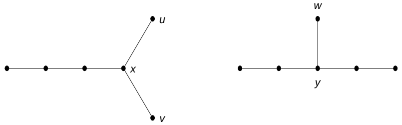
# Lebih Jauh Tentang Isomorfisma Graf

Kita telah melihat bahwa graf $G_1$ dan $G_2$ yang isomorfik memiliki ciri-ciri berikut: banyaknya simpul pada $G_1$ sama dengan banyaknya simpul pada $G_2$, banyaknya sisi pada $G_1$ sama dengan banyaknya sisi pada $G_2$, serta derajat masing-masing simpul yang saling berkorespondensi pada kedua graf tersebut sama.

# Lebih Jauh Tentang Isomorfisma Graf

Kita telah melihat bahwa graf $G_1$ dan $G_2$ yang isomorfik memiliki ciri-ciri berikut: banyaknya simpul pada $G_1$ sama dengan banyaknya simpul pada $G_2$, banyaknya sisi pada $G_1$ sama dengan banyaknya sisi pada $G_2$, serta derajat masing-masing simpul yang saling berkorespondensi pada kedua graf tersebut sama.

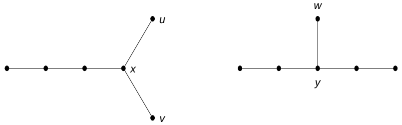
Namun terkadang ciri-ciri tersebut tidak cukup dan kita perlu menggambarkan $G_1$ dan $G_2$ untuk melakukan verifikasi visual. Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua graf pada gambar berikut (berturut-turut dari kiri ke kanan).



# Lebih Jauh Tentang Isomorfisma Graf

Kita telah melihat bahwa graf $G_1$ dan $G_2$ yang isomorfik memiliki ciri-ciri berikut: banyaknya simpul pada $G_1$ sama dengan banyaknya simpul pada $G_2$, banyaknya sisi pada $G_1$ sama dengan banyaknya sisi pada $G_2$, serta derajat masing-masing simpul yang saling berkorespondensi pada kedua graf tersebut sama.

Namun terkadang ciri-ciri tersebut tidak cukup dan kita perlu menggambarkan $G_1$ dan $G_2$ untuk melakukan verifikasi visual. Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua graf pada gambar berikut (berturut-turut dari kiri ke kanan).

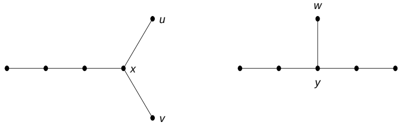



Meskipun $|V_1| = |V_2|$ dan $|E_1| = |E_2|$, kita memiliki $G_1 \ncong G_2$.

# Lebih Jauh Tentang Isomorfisma Graf

Kita telah melihat bahwa graf $G_1$ dan $G_2$ yang isomorfik memiliki ciri-ciri berikut: banyaknya simpul pada $G_1$ sama dengan banyaknya simpul pada $G_2$, banyaknya sisi pada $G_1$ sama dengan banyaknya sisi pada $G_2$, serta derajat masing-masing simpul yang saling berkorespondensi pada kedua graf tersebut sama.

Namun terkadang ciri-ciri tersebut tidak cukup dan kita perlu menggambarkan $G_1$ dan $G_2$ untuk melakukan verifikasi visual. Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua graf pada gambar berikut (berturut-turut dari kiri ke kanan).

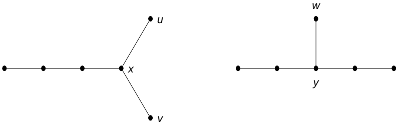



Meskipun $|V_1| = |V_2|$ dan $|E_1| = |E_2|$, kita memiliki $G_1 \ncong G_2$. Andaikan $G_1 \cong G_2$, maka satu-satunya isomorfisma yang mungkin haruslah membuat $f(x) =$

# Lebih Jauh Tentang Isomorfisma Graf

Kita telah melihat bahwa graf $G_1$ dan $G_2$ yang isomorfik memiliki ciri-ciri berikut: banyaknya simpul pada $G_1$ sama dengan banyaknya simpul pada $G_2$, banyaknya sisi pada $G_1$ sama dengan banyaknya sisi pada $G_2$, serta derajat masing-masing simpul yang saling berkorespondensi pada kedua graf tersebut sama.

Namun terkadang ciri-ciri tersebut tidak cukup dan kita perlu menggambarkan $G_1$ dan $G_2$ untuk melakukan verifikasi visual. Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua graf pada gambar berikut (berturut-turut dari kiri ke kanan).

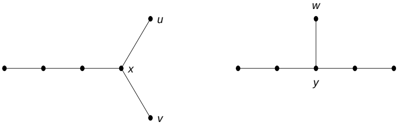



Meskipun $|V_1| = |V_2|$ dan $|E_1| = |E_2|$, kita memiliki $G_1 \ncong G_2$. Andaikan $G_1 \cong G_2$, maka satu-satunya isomorfisma yang mungkin haruslah membuat $f(x) = y$.

# Lebih Jauh Tentang Isomorfisma Graf

Kita telah melihat bahwa graf $G_1$ dan $G_2$ yang isomorfik memiliki ciri-ciri berikut: banyaknya simpul pada $G_1$ sama dengan banyaknya simpul pada $G_2$, banyaknya sisi pada $G_1$ sama dengan banyaknya sisi pada $G_2$, serta derajat masing-masing simpul yang saling berkorespondensi pada kedua graf tersebut sama.

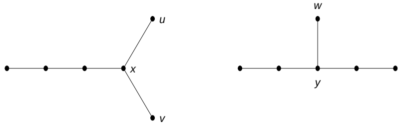
Namun terkadang ciri-ciri tersebut tidak cukup dan kita perlu menggambarkan $G_1$ dan $G_2$ untuk melakukan verifikasi visual. Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua graf pada gambar berikut (berturut-turut dari kiri ke kanan).




Meskipun $|V_1| = |V_2|$ dan $|E_1| = |E_2|$, kita memiliki $G_1 \ncong G_2$. Andaikan $G_1 \cong G_2$, maka satu-satunya isomorfisma yang mungkin haruslah membuat $f(x) = y$. Pada $G_1$, simpul $x$ bertetangga dengan dua simpul bandul (*pendant vertices*), yaitu $u$ dan $v$.

# Lebih Jauh Tentang Isomorfisma Graf

Kita telah melihat bahwa graf $G_1$ dan $G_2$ yang isomorfik memiliki ciri-ciri berikut: banyaknya simpul pada $G_1$ sama dengan banyaknya simpul pada $G_2$, banyaknya sisi pada $G_1$ sama dengan banyaknya sisi pada $G_2$, serta derajat masing-masing simpul yang saling berkorespondensi pada kedua graf tersebut sama.
Namun terkadang ciri-ciri tersebut tidak cukup dan kita perlu menggambarkan $G_1$ dan $G_2$ untuk melakukan verifikasi visual. Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua graf pada gambar berikut (berturut-turut dari kiri ke kanan).




Meskipun $|V_1| = |V_2|$ dan $|E_1| = |E_2|$, kita memiliki $G_1 \ncong G_2$. Andaikan $G_1 \cong G_2$, maka satu-satunya isomorfisma yang mungkin haruslah membuat $f(x) = y$. Pada $G_1$, simpul $x$ bertetangga dengan dua simpul bandul (*pendant vertices*), yaitu $u$ dan $v$. Sedangkan pada $G_2$, simpul $y$ hanya bertetangga dengan satu simpul bandul saja.

# Masalah Isomorfisma Graf (*Graph Isomorphism Problem*)

Masalah isomorfisma graf (*graph isomorphism problem*) adalah masalah komputasi berikut.

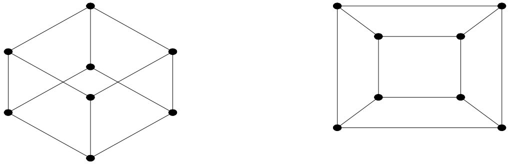
**Masalah Isomorfisma Graf (*Graph Isomorphism Problem*)**

Diberikan dua graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$, periksa apakah $G_1 \cong G_2$.

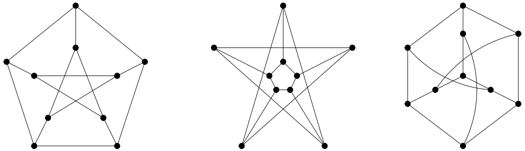
Tidak selamanya masalah isomorfisma graf dapat dipecahkan dengan mudah. Lebih jauh, algoritma yang efisien untuk memecahkan masalah ini juga belum ditemukan. Verifikasi isomorfisma graf secara manual memerlukan ketelitian dan cara pandang tertentu.

# Beberapa Contoh Graf yang Isomorfik

Dua graf berikut adalah graf yang isomorfik.



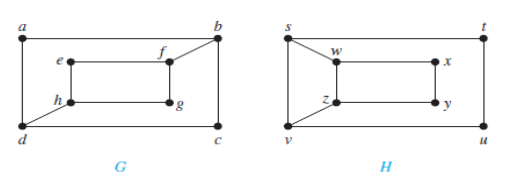
Tiga graf berikut adalah graf yang isomorfik.



# Latihan 1: Isomorfisma Graf

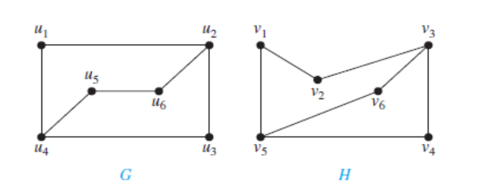
## Latihan

1. Periksa apakah graf $G$ dan $H$ berikut isomorfik.




Graf $G$ dan $H$

2. Periksa apakah graf $G$ dan $H$ berikut isomorfik.

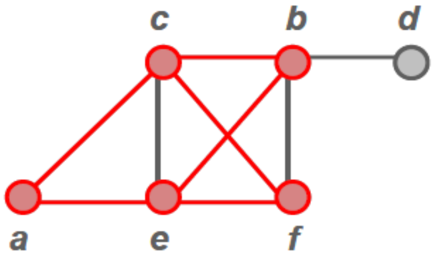



Graf $G$ dan $H$

# Bahasan

# Keterhubungan (*Connectivity*): Motivasi

Perhatikan graf berikut:




1. Apakah kita dapat pergi dari simpul $a$ ke setiap simpul yang lain?
2. Apakah terdapat suatu "lintasan" dari simpul $a$ ke simpul $b$ yang melalui semua sisi pada graf tersebut tepat sekali kecuali sisi $\{b, d\}$?
3. Dapatkah kita mengunjungi semua simpul yang ada dan kembali ke simpul awal dengan syarat setiap simpul dikunjungi tepat sekali?

# Definisi Lintasan

## Definisi (Definisi Lintasan)

Diberikan graf tak berarah $G = (V, E, f)$ dan bilangan bulat $n \geq 0$. Suatu lintasan (*path*) dengan panjang $n$ dari simpul $u$ ke $v$ adalah barisan yang terdiri atas $n$ sisi

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \text{ dengan}$$

$$f(e_1) = \{t_0, t_1\}, \; f(e_2) = \{t_1, t_2\}, \; \ldots, \; f(e_n) = \{t_{n-1}, t_n\}, \; t_0 = u \text{ dan } t_n = v.$$

Ketika $G$ adalah graf sederhana (tidak memuat sisi ganda maupun gelang), maka lintasan dengan panjang $n$ yang dijelaskan sebelumnya dapat ditulis sebagai $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Biasanya lintasan ini juga ditulis dengan $\langle t_0, t_1, \ldots, t_n \rangle$.

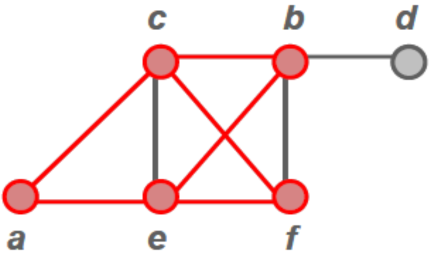
## Definisi

Suatu lintasan dikatakan melalui (*pass through*) simpul-simpul $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ atau melintasi (*traverse*) sisi-sisi $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Definisi lintasan untuk graf berarah analog dengan definisi di atas.

# Contoh Lintasan

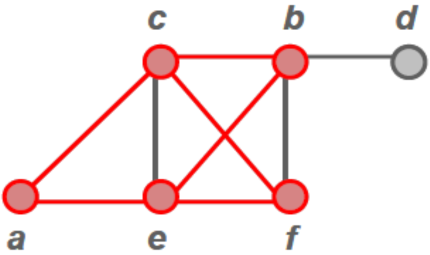
Tinjau graf berikut:




Pada graf di atas: $\langle a, e, f, c \rangle$ adalah lintasan dengan panjang

# Contoh Lintasan

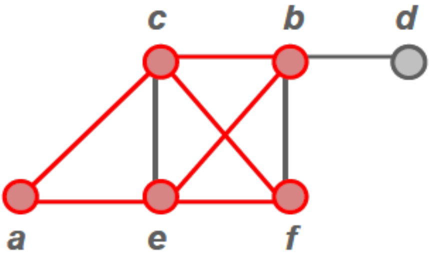
Tinjau graf berikut:




Pada graf di atas: $\langle a, e, f, c \rangle$ adalah lintasan dengan panjang $3$, $\langle a, e, b, c, a \rangle$ adalah lintasan dengan panjang

# Contoh Lintasan

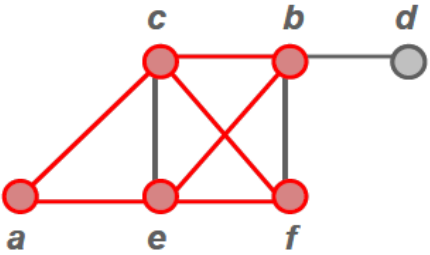
Tinjau graf berikut:




Pada graf di atas: $\langle a, e, f, c \rangle$ adalah lintasan dengan panjang $3$, $\langle a, e, b, c, a \rangle$ adalah lintasan dengan panjang $4$, $\langle a, e, f, e, f \rangle$ adalah lintasan dengan panjang

# Contoh Lintasan

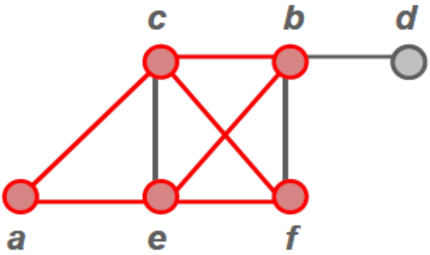
Tinjau graf berikut:




Pada graf di atas: $\langle a, e, f, c \rangle$ adalah lintasan dengan panjang $3$, $\langle a, e, b, c, a \rangle$ adalah lintasan dengan panjang $4$, $\langle a, e, f, e, f \rangle$ adalah lintasan dengan panjang $4$, dan $\langle a, e, c, a, e, a \rangle$ adalah lintasan dengan panjang

# Contoh Lintasan

Tinjau graf berikut:



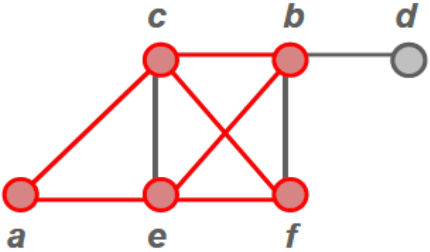

Pada graf di atas: $\langle a, e, f, c \rangle$ adalah lintasan dengan panjang $3$, $\langle a, e, b, c, a \rangle$ adalah lintasan dengan panjang $4$, $\langle a, e, f, e, f \rangle$ adalah lintasan dengan panjang $4$, dan $\langle a, e, c, a, e, a \rangle$ adalah lintasan dengan panjang $5$.

# Definisi dan Contoh Sirkuit (atau Siklus)

**Definisi (Definisi Sirkuit atau Siklus)**

Suatu lintasan $\langle t_0, t_1, \ldots, t_n \rangle$ disebut sirkuit atau siklus (*circuit/ cycle*) apabila $t_0 = t_n$ dan panjang dari lintasan tersebut **tak nol**.

Tinjau graf berikut:



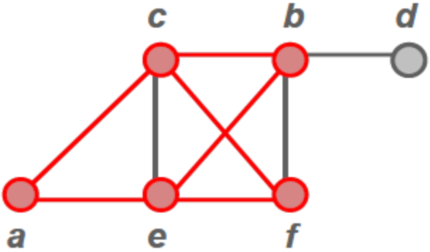

Pada graf di atas: $\langle e, f, b, c, e \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang

# Definisi dan Contoh Sirkuit (atau Siklus)

## Definisi (Definisi Sirkuit atau Siklus)

Suatu lintasan $\langle t_0, t_1, \ldots, t_n \rangle$ disebut sirkuit atau siklus (*circuit/ cycle*) apabila $t_0 = t_n$ dan panjang dari lintasan tersebut **tak nol**.

Tinjau graf berikut:



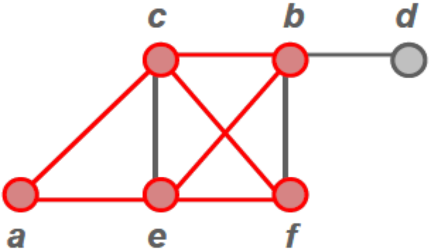

Pada graf di atas: $\langle e, f, b, c, e \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang $4$, $\langle a, e, f, c, a \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang

# Definisi dan Contoh Sirkuit (atau Siklus)

## Definisi (Definisi Sirkuit atau Siklus)

Suatu lintasan $\langle t_0, t_1, \ldots, t_n \rangle$ disebut sirkuit atau siklus (*circuit/ cycle*) apabila $t_0 = t_n$ dan panjang dari lintasan tersebut **tak nol**.

Tinjau graf berikut:



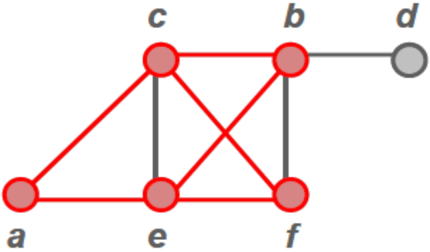

Pada graf di atas: $\langle e, f, b, c, e \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang $4$, $\langle a, e, f, c, a \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang $4$, $\langle a, e, c, a, e, a \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang

# Definisi dan Contoh Sirkuit (atau Siklus)

## Definisi (Definisi Sirkuit atau Siklus)

Suatu lintasan $\langle t_0, t_1, \ldots, t_n \rangle$ disebut sirkuit atau siklus (*circuit/ cycle*) apabila $t_0 = t_n$ dan panjang dari lintasan tersebut **tak nol**.

Tinjau graf berikut:



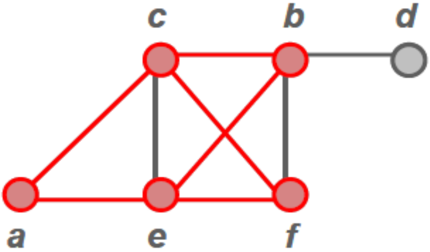

Pada graf di atas: $\langle e, f, b, c, e \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang $4$, $\langle a, e, f, c, a \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang $4$, $\langle a, e, c, a, e, a \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang $5$, dan $\langle d, b, e, f, b, d \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang

# Definisi dan Contoh Sirkuit (atau Siklus)

## Definisi (Definisi Sirkuit atau Siklus)

Suatu lintasan $\langle t_0, t_1, \ldots, t_n \rangle$ disebut sirkuit atau siklus (*circuit/ cycle*) apabila $t_0 = t_n$ dan panjang dari lintasan tersebut **tak nol**.

Tinjau graf berikut:




Pada graf di atas: $\langle e, f, b, c, e \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang $4$, $\langle a, e, f, c, a \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang $4$, $\langle a, e, c, a, e, a \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang $5$, dan $\langle d, b, e, f, b, d \rangle$ adalah sirkuit dengan panjang $5$.

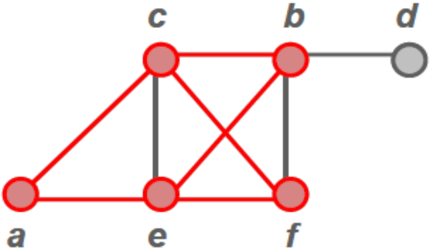
# Lintasan (Sirkuit) Sederhana dan Elementer

**Definisi (Definisi Lintasan/ Sirkuit Sederhana dan Elementer)**

Suatu lintasan (atau sirkuit) dikatakan sederhana (*simple*) apabila lintasan (atau sirkuit) tersebut **tidak** memuat (atau melintasi) sisi yang sama lebih dari sekali. Lebih lanjut, suatu lintasan (atau sirkuit) dikatakan elementer apabila **tidak** memuat (atau melalui) simpul yang sama lebih dari sekali.

# Contoh Lintasan (Sirkuit) Sederhana dan Elementer

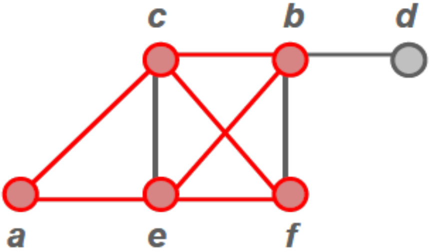
Tinjau graf berikut:




Pada graf di atas: $\langle a, e, a, e, a \rangle$

# Contoh Lintasan (Sirkuit) Sederhana dan Elementer

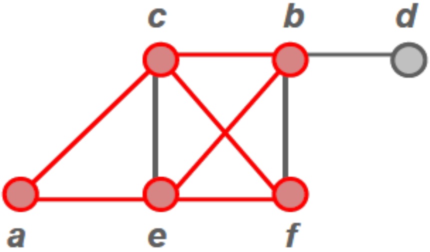
Tinjau graf berikut:




Pada graf di atas: $\langle a, e, a, e, a \rangle$ bukan lintasan sederhana dan bukan pula lintasan elementer, $\langle a, e, b, f, e \rangle$

# Contoh Lintasan (Sirkuit) Sederhana dan Elementer

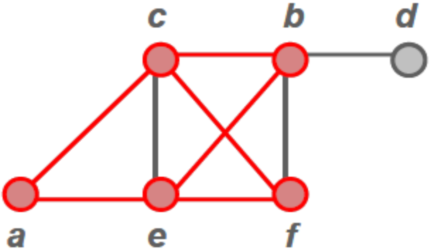
Tinjau graf berikut:




Pada graf di atas: $\langle a, e, a, e, a \rangle$ bukan lintasan sederhana dan bukan pula lintasan elementer, $\langle a, e, b, f, e \rangle$ adalah lintasan sederhana tetapi bukan lintasan elementer, serta $\langle a, e, f, b, d \rangle$

# Contoh Lintasan (Sirkuit) Sederhana dan Elementer

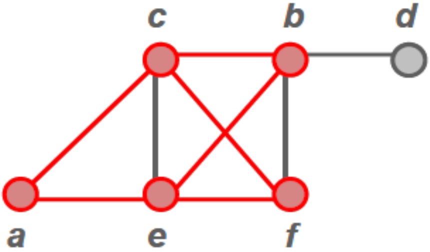
Tinjau graf berikut:




Pada graf di atas: $\langle a, e, a, e, a \rangle$ bukan lintasan sederhana dan bukan pula lintasan elementer, $\langle a, e, b, f, e \rangle$ adalah lintasan sederhana tetapi bukan lintasan elementer, serta $\langle a, e, f, b, d \rangle$ adalah lintasan sederhana dan sekaligus lintasan elementer.

# Contoh Lintasan (Sirkuit) Sederhana dan Elementer

Tinjau graf berikut:




Pada graf di atas: $\langle a, e, a, e, a \rangle$ bukan lintasan sederhana dan bukan pula lintasan elementer, $\langle a, e, b, f, e \rangle$ adalah lintasan sederhana tetapi bukan lintasan elementer, serta $\langle a, e, f, b, d \rangle$ adalah lintasan sederhana dan sekaligus lintasan elementer. Apakah pada graf di atas ada lintasan elementer yang bukan lintasan sederhana?

# Definisi Terhubung

## Definisi (Keterhubungan untuk Graf Tak Berarah)

Misalkan $G = (V, E, f)$ adalah suatu graf tak berarah. Dua simpul $u$ dan $v$ dikatakan terhubung apabila terdapat suatu lintasan dari $u$ ke $v$. Selanjutnya $G$ dikatakan terhubung apabila terdapat lintasan dari $u$ ke $v$ **untuk setiap** $u, v \in V$ dengan $u \neq v$.

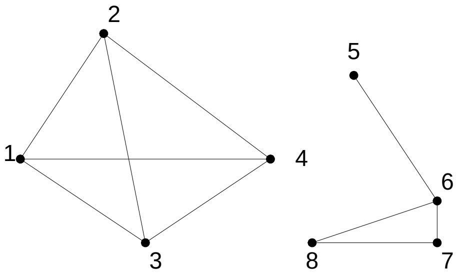
## Definisi (Keterhubungan untuk Graf Berarah)

Misalkan $G = (V, E, f)$ adalah suatu graf berarah. Simpul $u$ dikatakan terhubung ke $v$ (atau simpul $v$ terhubung dari $u$) apabila terdapat suatu lintasan dari $u$ ke $v$. Selanjutnya

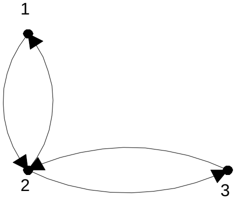
1. $G$ dikatakan terhubung kuat (*strongly connected*) apabila terdapat lintasan dari $u$ ke $v$ **dan** dari $v$ ke $u$ untuk setiap $u, v \in V$ dengan $u \neq v$,
2. $G$ dikatakan terhubung lemah (*weakly connected*) apabila graf tak berarah $G_0$ yang diperoleh dari graf $G$ dengan menghilangkan arahnya adalah graf terhubung.

Jika $G$ bukan graf terhubung, maka $G$ dikatakan sebagai graf tak terhubung (*disconnected graph*).

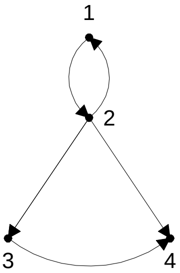
Berikut adalah contoh sebuah graf tak terhubung.



Berikut adalah contoh graf berarah yang terhubung kuat (*strongly connected*).



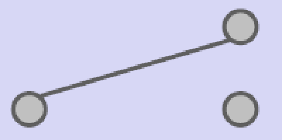

Berikut adalah contoh graf berarah yang terhubung lemah (*weakly connected*).



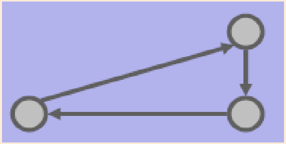
# Latihan 2: Keterhubungan

## Latihan

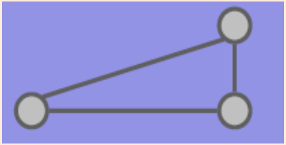
Klasifikasikan graf-graf berikut berdasarkan keterhubungannya



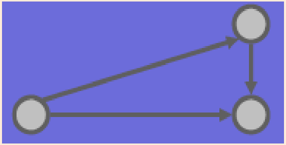
Graf $G_1$



Graf $G_2$



Graf $G_3$



Graf $G_4$

# Komponen Terhubung (*Connected Component*)

## Definisi (Komponen Terhubung/ *Connected Component* pada Graf Tak Berarah)

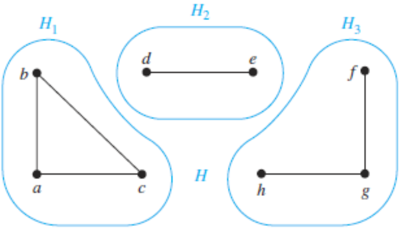
Komponen terhubung (*connected component*) dari sebuah graf $G$ merupakan subgraf dari $G$ yang terhubung dan bukan subgraf sejati (*proper subgraph*) dari subgraf lain yang terhubung.

# Komponen Terhubung (*Connected Component*)

## Definisi (Komponen Terhubung/ *Connected Component* pada Graf Tak Berarah)

Komponen terhubung (*connected component*) dari sebuah graf $G$ merupakan subgraf dari $G$ yang terhubung dan bukan subgraf sejati (*proper subgraph*) dari subgraf lain yang terhubung.

Perhatikan ilustrasi berikut.




Graf di atas adalah graf $H$ yang memuat tiga komponen terhubung, yaitu $H_1$, $H_2$, dan $H_3$.

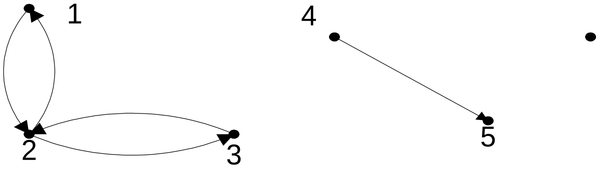
## Definisi (Komponen Terhubung Kuat/ *Strongly Connected Component* pada Graf Berarah)

Komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) dari sebuah graf $G$ merupakan subgraf dari $G$ yang terhubung kuat (*strongly connected*) dan bukan subgraf sejati (*proper subgraph*) dari subgraf lain yang terhubung.

## Definisi (Komponen Terhubung Kuat/ *Strongly Connected Component* pada Graf Berarah)

Komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) dari sebuah graf $G$ merupakan subgraf dari $G$ yang terhubung kuat (*strongly connected*) dan bukan subgraf sejati (*proper subgraph*) dari subgraf lain yang terhubung.

Sebagai contoh, graf $G$ pada berikut memiliki dua komponen terhubung kuat (subgraf paling kiri dan subgraf paling kanan).



# Himpunan Pemotong (*Cut Set*)

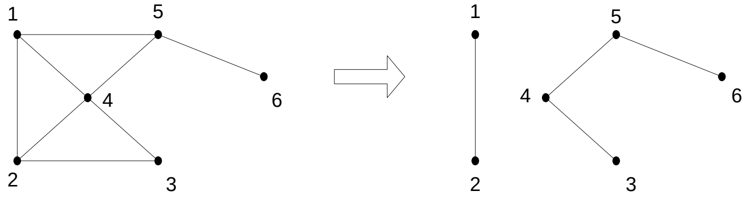
**Definisi (Himpunan Pemotong/ *Cut Set* dari Graf Terhubung)**

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf tak berarah yang terhubung, himpunan sisi $C \subseteq E$ dikatakan sebagai himpunan pemotong (*cut set*) bila

1. penghilangan sisi-sisi pada $C$ menyebabkan $G$ tidak terhubung,
2. tidak terdapat $D \subset C$ yang dapat menyebabkan $G$ tidak terhubung dengan penghilangan sisi-sisi pada $D$.

Secara intuitif, himpunan pemotong **tidak boleh** memuat subhimpunan pemotong lain.

Tinjau ilustrasi berikut:



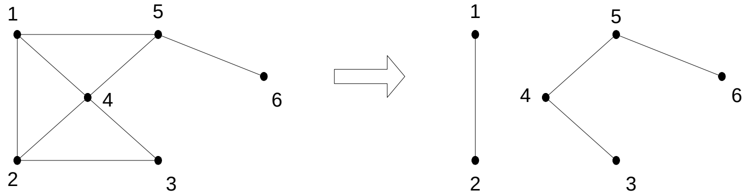

Himpunan $C = \{\{1,5\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ merupakan himpunan pemotong. Himpunan pemotong lain di antaranya adalah:

Tinjau ilustrasi berikut:


Himpunan $C = \{\{1,5\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ merupakan himpunan pemotong. Himpunan pemotong lain di antaranya adalah:

1. $C = \{\{1,5\},\{4,5\}\}$, tinjau bahwa semua semua himpunan bagian sejati dari $C$ bukan himpunan pemotong;

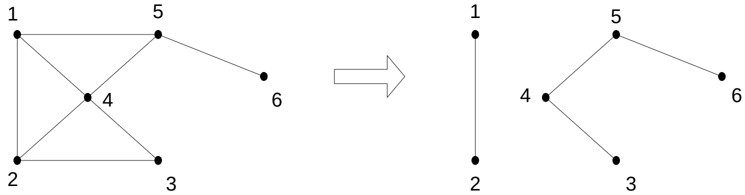
Tinjau ilustrasi berikut:




Himpunan $C = \{\{1,5\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ merupakan himpunan pemotong. Himpunan pemotong lain di antaranya adalah:

1. $C = \{\{1,5\},\{4,5\}\}$, tinjau bahwa semua semua himpunan bagian sejati dari $C$ bukan himpunan pemotong;
2. $C = \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\}\}$, tinjau bahwa semua semua himpunan bagian sejati dari $C$ bukan himpunan pemotong;

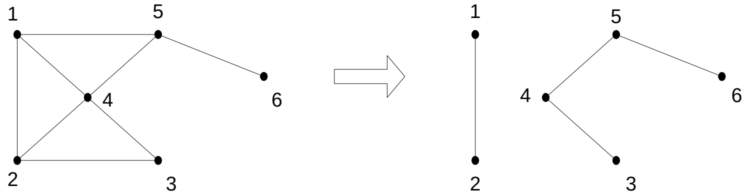
Tinjau ilustrasi berikut:




Himpunan $C = \{\{1,5\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ merupakan himpunan pemotong. Himpunan pemotong lain di antaranya adalah:

1. $C = \{\{1,5\},\{4,5\}\}$, tinjau bahwa semua semua himpunan bagian sejati dari $C$ bukan himpunan pemotong;
2. $C = \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\}\}$, tinjau bahwa semua semua himpunan bagian sejati dari $C$ bukan himpunan pemotong;
3. $C = \{\{5,6\}\}$, tinjau bahwa semua semua himpunan bagian sejati dari $C$ bukan himpunan pemotong.

Tinjau ilustrasi berikut:




Himpunan $C = \{\{1,5\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ merupakan himpunan pemotong. Himpunan pemotong lain di antaranya adalah:

1. $C = \{\{1,5\},\{4,5\}\}$, tinjau bahwa semua semua himpunan bagian sejati dari $C$ bukan himpunan pemotong;
2. $C = \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\}\}$, tinjau bahwa semua semua himpunan bagian sejati dari $C$ bukan himpunan pemotong;
3. $C = \{\{5,6\}\}$, tinjau bahwa semua semua himpunan bagian sejati dari $C$ bukan himpunan pemotong.

Himpunan $\{\{1,5\},\{4,5\},\{3,4\}\}$ **bukan himpunan pemotong** karena $\{\{1,5\},\{4,5\}\}$ sudah merupakan himpunan pemotong.

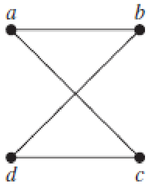
# Menghitung Banyaknya Lintasan antar Dua Simpul

Banyaknya lintasan dengan panjang tertentu antara dua simpul pada suatu graf dapat diperoleh meninjau matriks ketetanggaannya.

**Teorema**

Misalkan $G = (V, E, f)$ adalah graf (berarah atau tidak berarah, sisi ganda maupun gelang diperbolehkan) dengan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dengan matriks ketetanggaan $\mathbf{A}_G$. Apabila $\mathbf{A}_G[i, j]$ menyatakan banyaknya sisi dari $v_i$ ke $v_j$, maka banyaknya lintasan berbeda dengan panjang $r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ dari $v_i$ ke $v_j$ adalah entri $[i, j]$ pada matriks $\mathbf{A}_G^r$.

Misalkan $G$ adalah graf berikut.

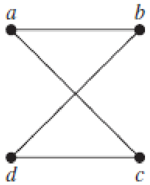



Graf $G$

Misalkan kita ingin mengetahui banyaknya lintasan pada $G$ dengan panjang $4$ dari $c$ ke $b$. Pada graf $G$, dengan urutan simpul $a, b, c, d$, kita memiliki

$$\mathbf{A}_G =$$

Misalkan $G$ adalah graf berikut.

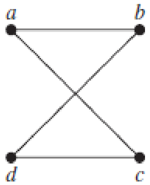



Graf $G$

Misalkan kita ingin mengetahui banyaknya lintasan pada $G$ dengan panjang $4$ dari $c$ ke $b$. Pada graf $G$, dengan urutan simpul $a, b, c, d$, kita memiliki

$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_G^4 =$$

Misalkan $G$ adalah graf berikut.




Graf $G$

Misalkan kita ingin mengetahui banyaknya lintasan pada $G$ dengan panjang $4$ dari $c$ ke $b$. Pada graf $G$, dengan urutan simpul $a, b, c, d$, kita memiliki

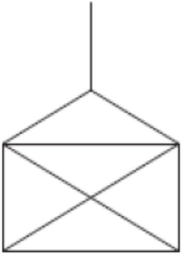
$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_G^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Jadi ada $8$ lintasan dengan panjang $4$ dari $c$ ke $b$.

# Bahasan

# Motivasi: Lintasan dan Sirkuit Euler

Apakah pola pada gambar berikut dapat digambar memakai pensil dengan gerakan kontinu (tanpa mengangkat pensil) dan tanpa menggambar garis yang sama lebih dari sekali?



# Definisi Lintasan dan Sirkuit Euler

## Definisi (Graf Ganda (*Multigraph*))

Suatu graf tak berarah $G = (V, E, f)$ disebut graf ganda (*multigraph*) apabila $G$ dapat memiliki sisi ganda namun tidak boleh mempunyai gelang.

## Definisi (Lintasan dan Sirkuit Euler)

Misalkan $G = (V, E, f)$ adalah suatu graf ganda atau graf berarah yang tidak memuat gelang, lintasan Euler adalah lintasan sederhana yang memuat setiap sisi pada $G$. Kemudian sirkuit Euler merupakan lintasan Euler yang berawal dan berakhir di satu simpul.

Jadi lintasan Euler dari suatu graf adalah lintasan yang melintasi setiap sisi pada graf tersebut **tepat sekali**. Kemudian sirkuit Euler dari suatu graf adalah sirkuit yang melintasi setiap sisi pada graf tersebut **tepat sekali**.

# Graf Euler (*Eulerian Graph*) dan Graf Semi-Euler (*Semi-Eulerian Graph*)

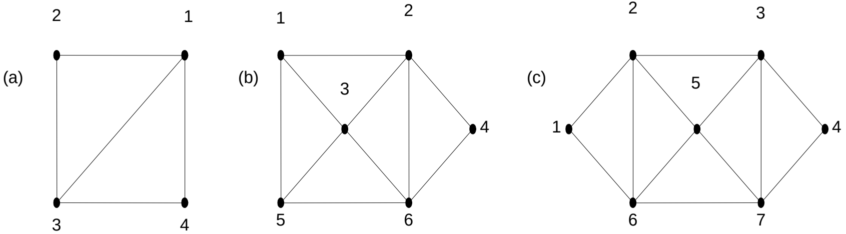
## Definisi (Graf Euler (*Eulerian Graph*) dan Graf Semi-Euler (*Semi-Eulerian Graph*))

Sebuah graf yang memiliki sirkuit Euler disebut sebagai graf Euler (*Eulerian graph*). Jika graf tersebut tidak memiliki sirkuit Euler namun memiliki lintasan Euler, maka graf tersebut dikatakan sebagai graf semi-Euler (*semi-Eulerian graph*).

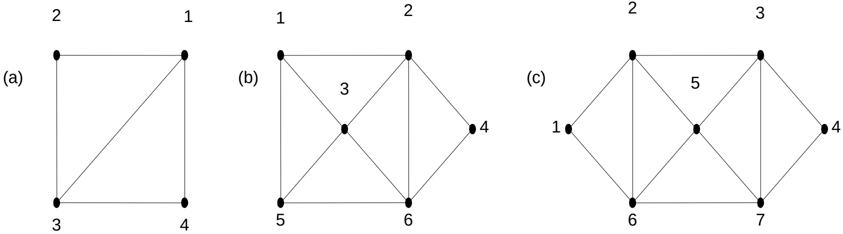
## Catatan

Setiap graf yang memiliki sirkuit Euler jelas memiliki lintasan Euler, namun tidak sebaliknya.

Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar (a), (b), dan (c).

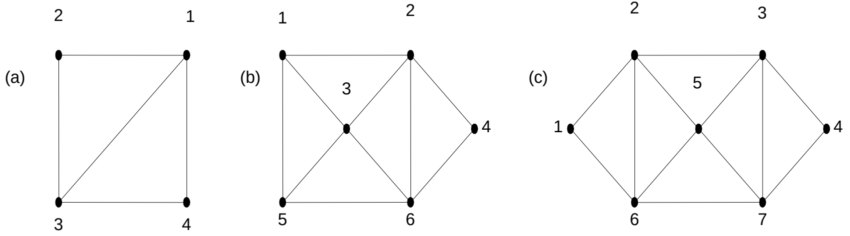


Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar (a), (b), dan (c).



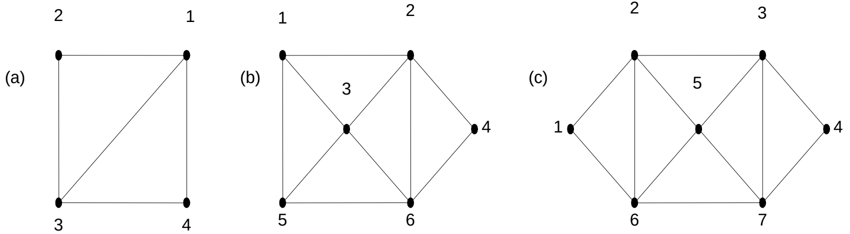

1. Graf $G_1$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya

Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar (a), (b), dan (c).



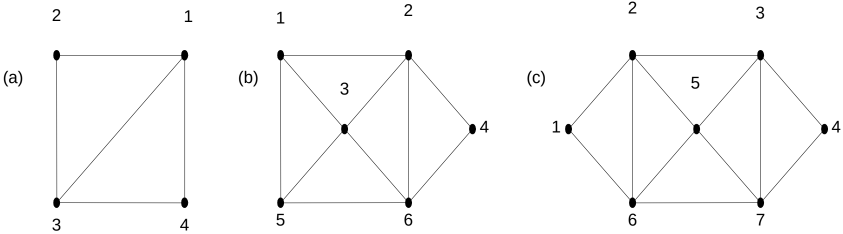

1. Graf $G_1$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya $\langle 1, 2, 3, 1, 4, 3 \rangle$.

Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar (a), (b), dan (c).



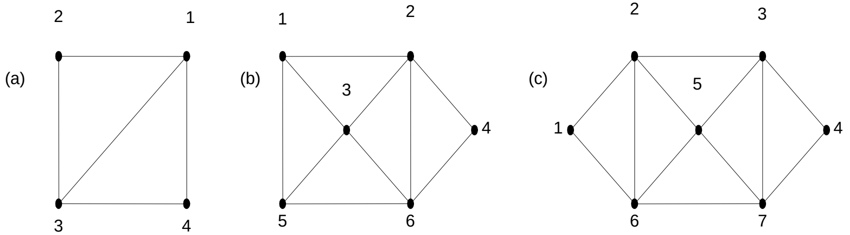

1. Graf $G_1$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya $\langle 1, 2, 3, 1, 4, 3 \rangle$. Namun $G_1$ tidak memiliki sirkuit Euler (silakan periksa).

Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar (a), (b), dan (c).



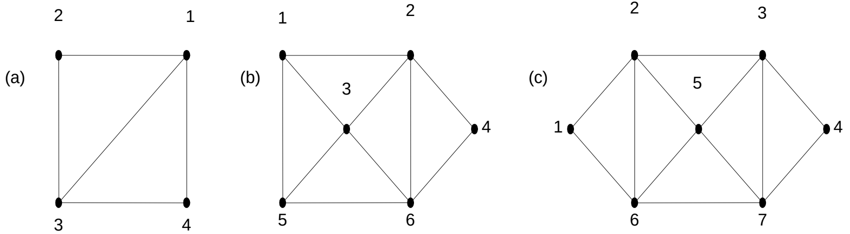

1. Graf $G_1$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya $\langle 1, 2, 3, 1, 4, 3 \rangle$. Namun $G_1$ tidak memiliki sirkuit Euler (silakan periksa).
2. Graf $G_2$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya

Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar (a), (b), dan (c).



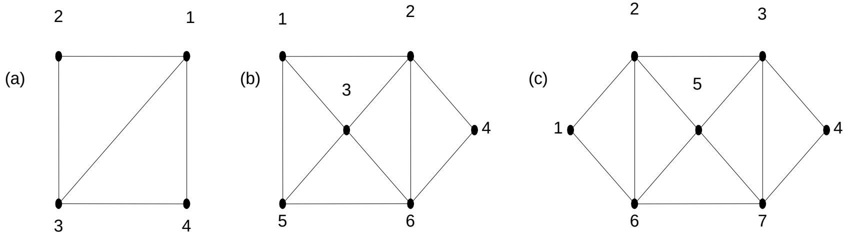

1. Graf $G_1$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya $\langle 1, 2, 3, 1, 4, 3 \rangle$. Namun $G_1$ tidak memiliki sirkuit Euler (silakan periksa).
2. Graf $G_2$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya $\langle 1, 2, 4, 6, 2, 3, 6, 5, 1, 3, 5 \rangle$.

Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar (a), (b), dan (c).



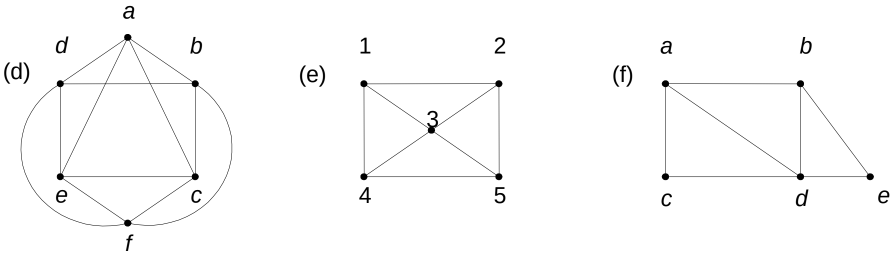

1. Graf $G_1$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya $\langle 1, 2, 3, 1, 4, 3 \rangle$. Namun $G_1$ tidak memiliki sirkuit Euler (silakan periksa).
2. Graf $G_2$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya $\langle 1, 2, 4, 6, 2, 3, 6, 5, 1, 3, 5 \rangle$. Namun $G_2$ tidak memiliki sirkuit Euler (silakan periksa).

Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar (a), (b), dan (c).

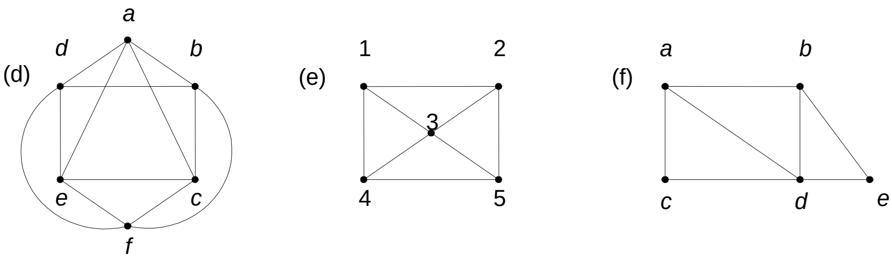



1. Graf $G_1$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya $\langle 1, 2, 3, 1, 4, 3 \rangle$. Namun $G_1$ tidak memiliki sirkuit Euler (silakan periksa).
2. Graf $G_2$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya $\langle 1, 2, 4, 6, 2, 3, 6, 5, 1, 3, 5 \rangle$. Namun $G_2$ tidak memiliki sirkuit Euler (silakan periksa).
3. Graf $G_3$ memiliki sebuah sirkuit Euler, salah satunya $\langle 1, 2, 3, 4, 7, 3, 5, 7, 6, 5, 2, 6, 1 \rangle$.

Misalkan $G_4$, $G_5$, dan $G_6$ berturut-turut adalah graf pada gambar (d), (e), dan (f).

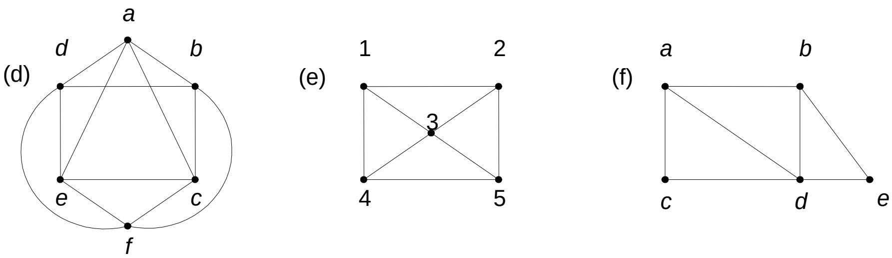


Misalkan $G_4$, $G_5$, dan $G_6$ berturut-turut adalah graf pada gambar (d), (e), dan (f).



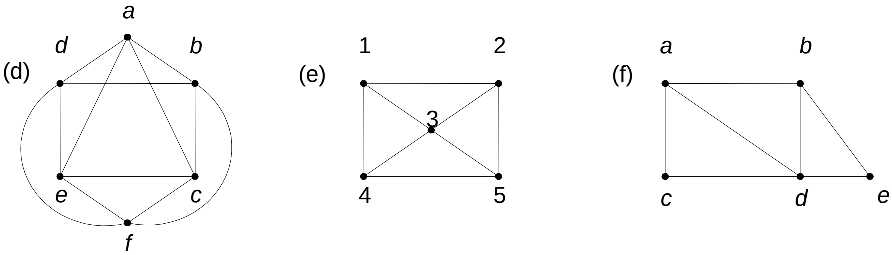

1. Graf $G_4$ memiliki sebuah sirkuit Euler, salah satunya $\langle a, c, f, e, c, b, d, e, a, d, f, b, a \rangle$.

Misalkan $G_4$, $G_5$, dan $G_6$ berturut-turut adalah graf pada gambar (d), (e), dan (f).



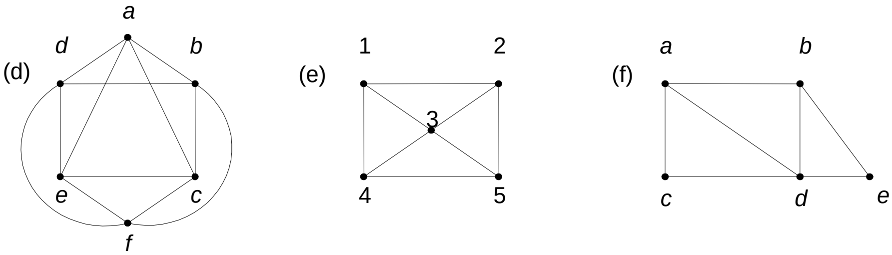

1. Graf $G_4$ memiliki sebuah sirkuit Euler, salah satunya $\langle a, c, f, e, c, b, d, e, a, d, f, b, a \rangle$.
2. Graf $G_5$ tidak memiliki sirkuit maupun lintasan Euler.

Misalkan $G_4$, $G_5$, dan $G_6$ berturut-turut adalah graf pada gambar (d), (e), dan (f).




1. Graf $G_4$ memiliki sebuah sirkuit Euler, salah satunya $\langle a, c, f, e, c, b, d, e, a, d, f, b, a \rangle$.
2. Graf $G_5$ tidak memiliki sirkuit maupun lintasan Euler.
3. Graf $G_6$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya $\langle a, c, d, e, b, d, a, b \rangle$.

Misalkan $G_4$, $G_5$, dan $G_6$ berturut-turut adalah graf pada gambar (d), (e), dan (f).




1. Graf $G_4$ memiliki sebuah sirkuit Euler, salah satunya $\langle a, c, f, e, c, b, d, e, a, d, f, b, a \rangle$.
2. Graf $G_5$ tidak memiliki sirkuit maupun lintasan Euler.
3. Graf $G_6$ memiliki sebuah lintasan Euler, salah satunya $\langle a, c, d, e, b, d, a, b \rangle$. Namun $G_6$ tidak memiliki sirkuit Euler (silakan periksa).

# Teorema Terkait Lintasan dan Sirkuit Euler untuk Graf Tak Berarah

### Teorema

Graf ganda $G = (V, E, f)$ memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika $G$ terhubung dan setiap simpulnya berderajat genap.

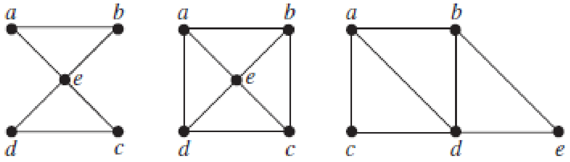
### Teorema

Graf ganda $G = (V, E, f)$ memiliki lintasan Euler tetapi tidak memiliki sirkuit Euler jika dan hanya $G$ terhubung dan memiliki **tepat dua simpul** berderajat ganjil.

# Latihan 3: Lintasan & Sirkuit Euler Graf Tak Berarah

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut memiliki sirkuit Euler? Jika tidak periksa apakah graf tersebut memiliki lintasan Euler.




$G_1$ $G_2$ $G_3$

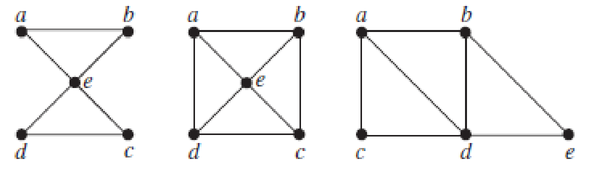
Solusi:

- Graf $G_1$

# Latihan 3: Lintasan & Sirkuit Euler Graf Tak Berarah

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut memiliki sirkuit Euler? Jika tidak periksa apakah graf tersebut memiliki lintasan Euler.




$G_1$ $G_2$ $G_3$

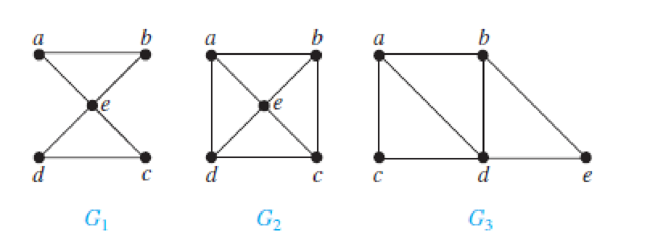
Solusi:

- Graf $G_1$ memiliki sirkuit Euler, karena derajat dari setiap simpulnya genap, salah satu sirkuitnya adalah $\langle a, b, e, c, d, e, a \rangle$.
- Graf $G_2$

# Latihan 3: Lintasan & Sirkuit Euler Graf Tak Berarah

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut memiliki sirkuit Euler? Jika tidak periksa apakah graf tersebut memiliki lintasan Euler.



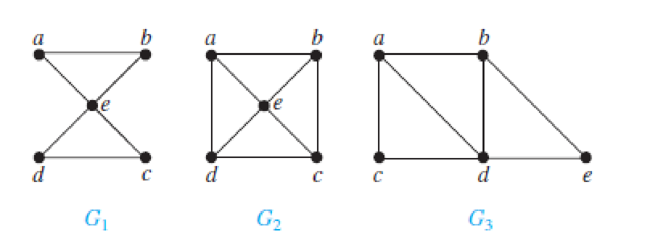

Solusi:

- Graf $G_1$ memiliki sirkuit Euler, karena derajat dari setiap simpulnya genap, salah satu sirkuitnya adalah $\langle a, b, e, c, d, e, a \rangle$.
- Graf $G_2$ tidak memiliki lintasan Euler, karena terdapat empat simpul berderajat ganjil, yaitu $\deg(a) = \deg(b) = \deg(c) = \deg(d) = 3$.
- Graf $G_3$

# Latihan 3: Lintasan & Sirkuit Euler Graf Tak Berarah

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut memiliki sirkuit Euler? Jika tidak periksa apakah graf tersebut memiliki lintasan Euler.



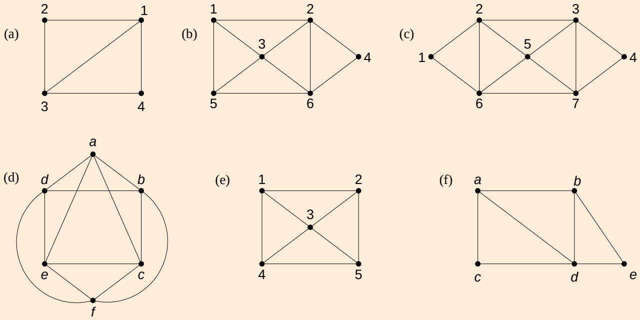

Solusi:

- Graf $G_1$ memiliki sirkuit Euler, karena derajat dari setiap simpulnya genap, salah satu sirkuitnya adalah $\langle a, b, e, c, d, e, a \rangle$.
- Graf $G_2$ tidak memiliki lintasan Euler, karena terdapat empat simpul berderajat ganjil, yaitu $\deg(a) = \deg(b) = \deg(c) = \deg(d) = 3$.
- Graf $G_3$ tidak memiliki sirkuit Euler tetapi memiliki lintasan Euler, salah satu lintasannya adalah $\langle a, b, e, d, c, a, d, b \rangle$.

# Latihan 4: Graf Euler dan Semi-Euler

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut merupakan graf Euler, semi-Euler, atau bukan keduanya.

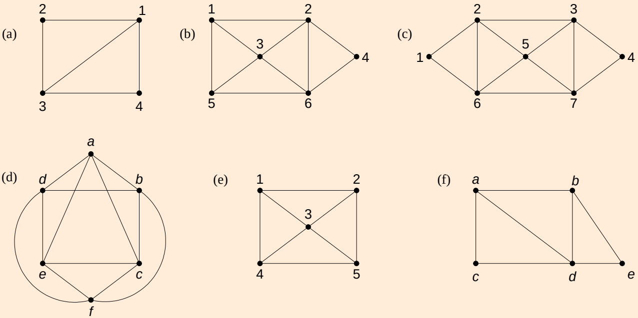



Solusi:

# Latihan 4: Graf Euler dan Semi-Euler

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut merupakan graf Euler, semi-Euler, atau bukan keduanya.

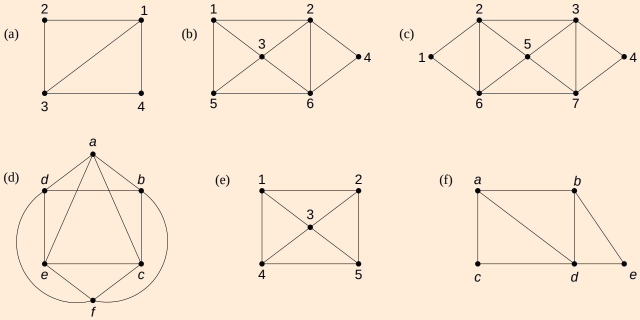



Solusi: a) graf semi-Euler,

# Latihan 4: Graf Euler dan Semi-Euler

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut merupakan graf Euler, semi-Euler, atau bukan keduanya.

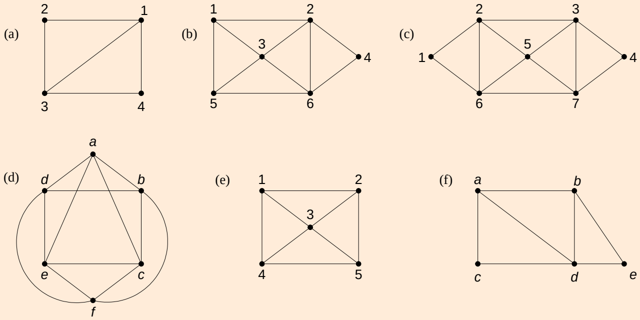



Solusi: a) graf semi-Euler, b) graf semi-Euler,

# Latihan 4: Graf Euler dan Semi-Euler

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut merupakan graf Euler, semi-Euler, atau bukan keduanya.

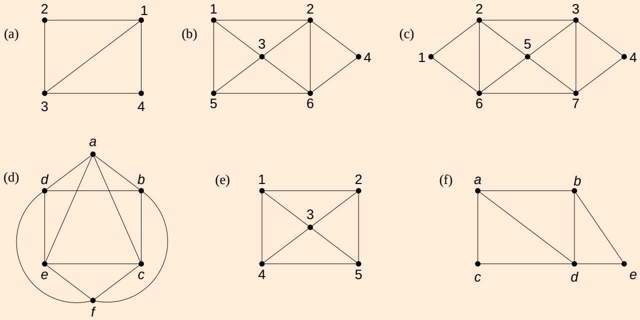



Solusi: a) graf semi-Euler, b) graf semi-Euler, c) graf Euler,

# Latihan 4: Graf Euler dan Semi-Euler

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut merupakan graf Euler, semi-Euler, atau bukan keduanya.

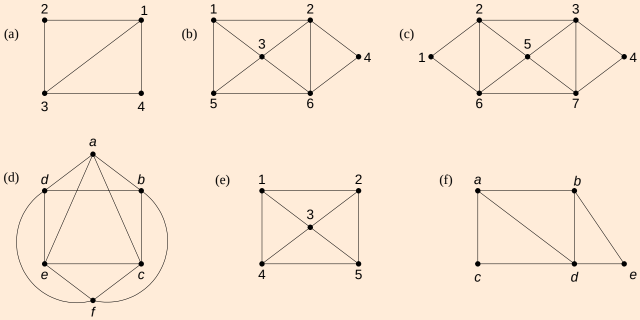



Solusi: a) graf semi-Euler, b) graf semi-Euler, c) graf Euler, d) graf Euler,

# Latihan 4: Graf Euler dan Semi-Euler

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut merupakan graf Euler, semi-Euler, atau bukan keduanya.

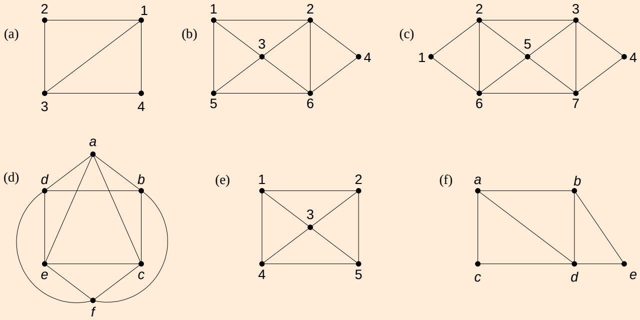



Solusi: a) graf semi-Euler, b) graf semi-Euler, c) graf Euler, d) graf Euler, e) bukan keduanya,

# Latihan 4: Graf Euler dan Semi-Euler

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut merupakan graf Euler, semi-Euler, atau bukan keduanya.




Solusi: a) graf semi-Euler, b) graf semi-Euler, c) graf Euler, d) graf Euler, e) bukan keduanya, f) graf semi-Euler.

# Teorema Terkait Lintasan dan Sirkuit Euler untuk Graf Berarah

## Teorema

Graf berarah $G = (V, E)$ memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika $G$ terhubung dan setiap simpul memiliki derajat masuk dan derajat keluar yang sama, dengan perkataan lain $\deg_{in}(v) = \deg_{out}(v)$ atau $\deg^{-}(v) = \deg^{+}(v)$ untuk setiap $v \in V$.

## Teorema

Graf berarah $G = (V, E)$ memiliki lintasan Euler namun **tidak** memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika $G$ terhubung dan setiap simpul memiliki derajat masuk dan derjat keluar yang sama, kecuali untuk dua simpul $a$ dan $b$ dengan sifat:

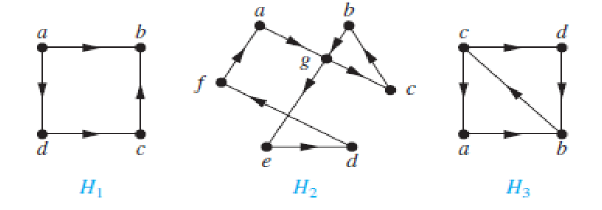
1. $\deg_{out}(a) = \deg_{in}(a) + 1$, atau $\deg^{+}(a) = \deg^{-}(a) + 1$
2. $\deg_{in}(b) = \deg_{out}(b) + 1$, atau $\deg^{-}(b) = \deg^{+}(b) + 1$.

Artinya terdapat tepat dua simpul, simpul yang pertama derajat keluarnya satu lebih besar dari derajat masuknya, simpul yang kedua derajat masuknya satu lebih besar dari derajat keluarnya.

# Latihan 5: Lintasan & Sirkuit Euler Graf Berarah

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut memiliki sirkuit Euler? Jika tidak periksa apakah graf tersebut memiliki lintasan Euler.

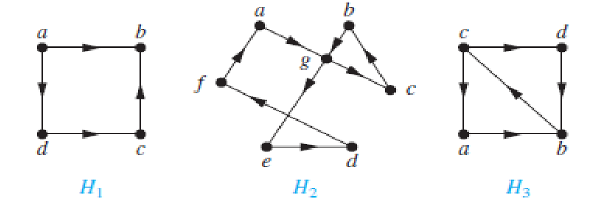



Solusi:

# Latihan 5: Lintasan & Sirkuit Euler Graf Berarah

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut memiliki sirkuit Euler? Jika tidak periksa apakah graf tersebut memiliki lintasan Euler.



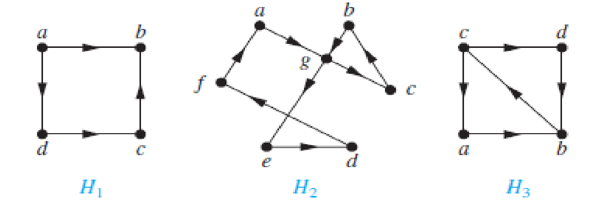

Solusi:

1. Graf $H_1$ tidak memiliki lintasan Euler, karena $\deg^+(a) = 2$ tetapi $\deg^-(a) = 0$.

# Latihan 5: Lintasan & Sirkuit Euler Graf Berarah

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut memiliki sirkuit Euler? Jika tidak periksa apakah graf tersebut memiliki lintasan Euler.



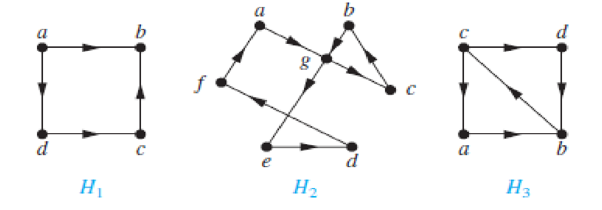

Solusi:

1. Graf $H_1$ tidak memiliki lintasan Euler, karena $\deg^+(a) = 2$ tetapi $\deg^-(a) = 0$.
2. Graf $H_2$ memiliki sirkuit Euler, salah satu sirkuitnya adalah $\langle a, g, c, b, g, e, d, f, a \rangle$.

# Latihan 5: Lintasan & Sirkuit Euler Graf Berarah

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut memiliki sirkuit Euler? Jika tidak periksa apakah graf tersebut memiliki lintasan Euler.



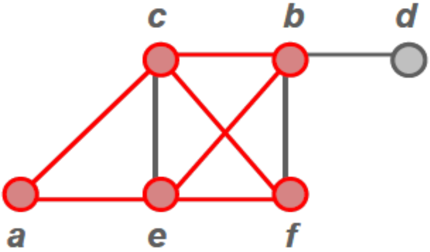

Solusi:

1. Graf $H_1$ tidak memiliki lintasan Euler, karena $\deg^+(a) = 2$ tetapi $\deg^-(a) = 0$.
2. Graf $H_2$ memiliki sirkuit Euler, salah satu sirkuitnya adalah $\langle a, g, c, b, g, e, d, f, a \rangle$.
3. Graf $H_3$ tidak memiliki sirkuit Euler tapi memiliki lintasan Euler, salah satu lintasannya adalah $\langle c, a, b, c, d, b \rangle$.

# Bahasan

# Motivasi: Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Tinjau graf berikut:




Graf $G$

Apakah terdapat suatu sirkuit yang melalui semua simpul pada graf $G$ tepat sekali? Jika tidak apakah terdapat suatu lintasan yang melalui semua simpul pada graf $G$ tepat sekali?

# Definisi Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Lintasan dan sirkuit Hamilton yang dikaji pada kuliah ini ditinjau pada graf sederhana (graf tanpa sisi ganda maupun gelang).

## Definisi

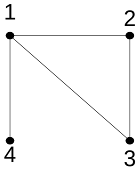
Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf sederhana. Lintasan Hamilton adalah lintasan sederhana yang melewati setiap simpul pada $G$ tepat sekali. Sirkuit Hamilton adalah sirkuit sederhana yang melewati setiap simpul pada $G$ tepat sekali, kecuali untuk simpul awal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui tepat dua kali.

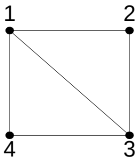
## Definisi

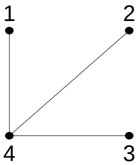
Graf yang memiliki sikuit Hamilton disebut graf Hamilton, sedangkan graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton disebut graf semi-Hamilton.

Perhatikan bahwa apabila $G = (V, E)$ adalah graf semi-Hamilton dan $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ adalah lintasan Hamilton pada $G$ maka $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$.

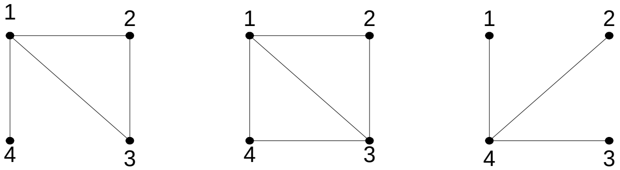
Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar kiri, tengah, dan kanan.



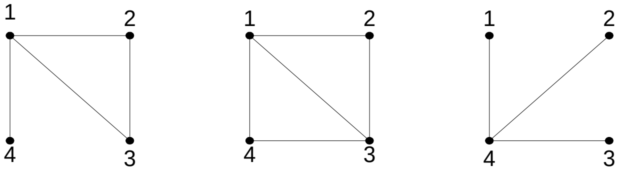



Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar kiri, tengah, dan kanan.



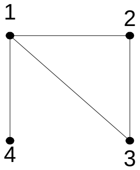

1. Graf $G_1$ memiliki lintasan Hamilton, salah satunya $\langle 4, 1, 3, 2 \rangle$.

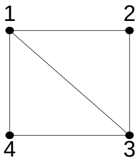
Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar kiri, tengah, dan kanan.

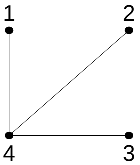



1. Graf $G_1$ memiliki lintasan Hamilton, salah satunya $\langle 4, 1, 3, 2 \rangle$. Namun $G_1$ tidak mungkin memiliki sirkuit Hamilton. Hal ini karena setiap sirkuit yang memuat simpul $4$ pasti memuat simpul $1$ lebih dari sekali.

Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar kiri, tengah, dan kanan.

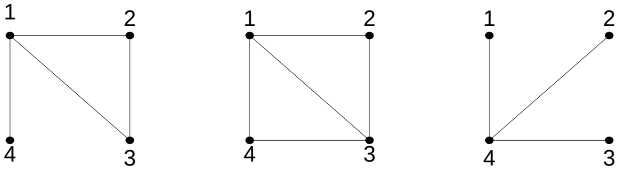






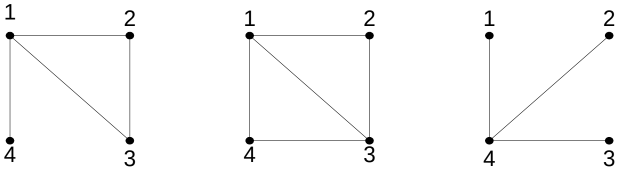

1. Graf $G_1$ memiliki lintasan Hamilton, salah satunya $\langle 4, 1, 3, 2\rangle$. Namun $G_1$ tidak mungkin memiliki sirkuit Hamilton. Hal ini karena setiap sirkuit yang memuat simpul $4$ pasti memuat simpul $1$ lebih dari sekali.
2. Graf $G_2$ memiliki sirkuit Hamilton, salah satunya $\langle 1, 2, 3, 4, 1\rangle$.

Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar kiri, tengah, dan kanan.




1. Graf $G_1$ memiliki lintasan Hamilton, salah satunya $\langle 4, 1, 3, 2 \rangle$. Namun $G_1$ tidak mungkin memiliki sirkuit Hamilton. Hal ini karena setiap sirkuit yang memuat simpul $4$ pasti memuat simpul $1$ lebih dari sekali.
2. Graf $G_2$ memiliki sirkuit Hamilton, salah satunya $\langle 1, 2, 3, 4, 1 \rangle$.
3. Graf $G_3$ tidak memiliki lintasan Hamilton.

Misalkan $G_1$, $G_2$, dan $G_3$ berturut-turut adalah graf pada gambar kiri, tengah, dan kanan.

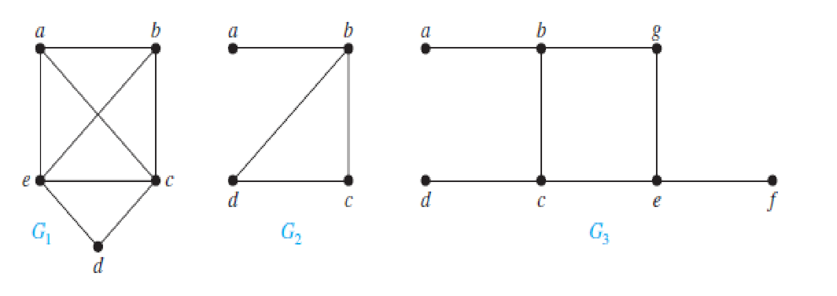



1. Graf $G_1$ memiliki lintasan Hamilton, salah satunya $\langle 4, 1, 3, 2\rangle$. Namun $G_1$ tidak mungkin memiliki sirkuit Hamilton. Hal ini karena setiap sirkuit yang memuat simpul $4$ pasti memuat simpul $1$ lebih dari sekali.
2. Graf $G_2$ memiliki sirkuit Hamilton, salah satunya $\langle 1, 2, 3, 4, 1\rangle$.
3. Graf $G_3$ tidak memiliki lintasan Hamilton. Hal ini karena setiap lintasan yang memuat simpul $1$ dan simpul $3$ sekaligus pasti memuat simpul $4$ lebih dari sekali.

# Latihan 6: Lintasan dan Sirkuit Hamilton

## Latihan

Periksa apakah graf-graf berikut memiliki sirkuit Hamilton? Jika tidak periksa apakah graf tersebut memiliki lintasan Hamilton.




Graf $G_1$, $G_2$, dan $G_3$

# Solusi Latihan 6

1. $G_1$ memiliki sirkuit Hamilton, yaitu

# Solusi Latihan 6

1. $G_1$ memiliki sirkuit Hamilton, yaitu $\langle a, b, c, d, e, a \rangle$.

# Solusi Latihan 6

1. $G_1$ memiliki sirkuit Hamilton, yaitu $\langle a, b, c, d, e, a \rangle$.
2. $G_2$ tidak memiliki sirkuit Hamilton, tetapi $G_2$ memiliki lintasan Hamilton, yaitu

# Solusi Latihan 6

1. $G_1$ memiliki sirkuit Hamilton, yaitu $\langle a, b, c, d, e, a \rangle$.
2. $G_2$ tidak memiliki sirkuit Hamilton, tetapi $G_2$ memiliki lintasan Hamilton, yaitu $\langle a, b, c, d \rangle$.

# Solusi Latihan 6

1. $G_1$ memiliki sirkuit Hamilton, yaitu $\langle a, b, c, d, e, a \rangle$.
2. $G_2$ tidak memiliki sirkuit Hamilton, tetapi $G_2$ memiliki lintasan Hamilton, yaitu $\langle a, b, c, d \rangle$.
   $G_2$ tidak memiliki sirkuit Hamilton karena setiap sirkuit yang melalui semua simpul pada $G_2$ harus memuat sisi $\{a, b\}$ setidaknya dua kali.

# Solusi Latihan 6

1. $G_1$ memiliki sirkuit Hamilton, yaitu $\langle a, b, c, d, e, a \rangle$.
2. $G_2$ tidak memiliki sirkuit Hamilton, tetapi $G_2$ memiliki lintasan Hamilton, yaitu $\langle a, b, c, d \rangle$.
   $G_2$ tidak memiliki sirkuit Hamilton karena setiap sirkuit yang melalui semua simpul pada $G_2$ harus memuat sisi $\{a, b\}$ setidaknya dua kali.
3. $G_3$ tidak memiliki lintasan Hamilton. Hal ini dikarenakan setiap lintasan yang memuat semua simpul pada $G_3$ pasti memuat salah satu dari sisi $\{a, b\}$, $\{e, f\}$, atau $\{c, d\}$ lebih dari sekali.

# Teorema Terkait Lintasan dan Sirkuit Hamilton

## Teorema

Graf lengkap $K_n$ untuk $n \geq 3$ memiliki sirkuit Hamilton.

## Teorema (Teorema Dirac)

Apabila $G = (V, E)$ adalah graf terhubung sederhana dengan $|V| \geq 3$ yang memenuhi

$$\deg(v) \geq \frac{|V|}{2} \text{ untuk setiap } v \in V,$$

maka $G$ memiliki sirkuit Hamilton.

## Teorema (Teorema Ore)

Apabila $G = (V, E)$ adalah graf terhubung sederhana dengan $|V| \geq 3$ yang memenuhi

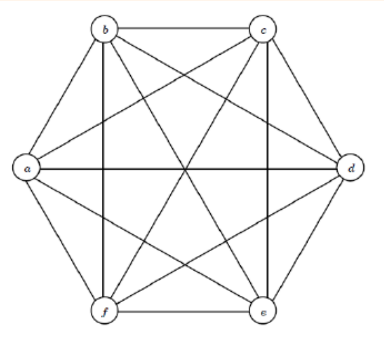
$$\deg(u) + \deg(v) \geq |V|, \text{ untuk setiap } u, v \in V \text{ yang tidak bertetangga,}$$

maka $G$ memiliki sirkuit Hamilton.

# Latihan 7: Menghitung Sirkuit Hamilton Berbeda

## Latihan

Tentukan banyaknya sirkuit Hamilton yang berbeda dengan simpul awal dan simpul akhir $a$ pada Graf berikut.



Graf yang ditinjau adalah $K_6$ dengan himpunan simpul $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sirkuit Hamilton dengan simpul awal dan akhir $a$ pada graf tersebut pasti berbentuk

Graf yang ditinjau adalah $K_6$ dengan himpunan simpul $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sirkuit Hamilton dengan simpul awal dan akhir $a$ pada graf tersebut pasti berbentuk

$$\langle a, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, a \rangle ,$$

dengan $v_i \in V$ untuk setiap $1 \leq i \leq 5$. Karena graf yang ditinjau adalah $K_6$, maka setiap simpul saling bertetangga, akibatnya:

Graf yang ditinjau adalah $K_6$ dengan himpunan simpul $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sirkuit Hamilton dengan simpul awal dan akhir $a$ pada graf tersebut pasti berbentuk

$$\langle a, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, a \rangle \, ,$$

dengan $v_i \in V$ untuk setiap $1 \leq i \leq 5$. Karena graf yang ditinjau adalah $K_6$, maka setiap simpul saling bertetangga, akibatnya:

1. ada $5$ pilihan untuk $v_1$ (karena $v_1 \neq a$),

Graf yang ditinjau adalah $K_6$ dengan himpunan simpul $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sirkuit Hamilton dengan simpul awal dan akhir $a$ pada graf tersebut pasti berbentuk

$$\langle a, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, a\rangle \, ,$$

dengan $v_i \in V$ untuk setiap $1 \leq i \leq 5$. Karena graf yang ditinjau adalah $K_6$, maka setiap simpul saling bertetangga, akibatnya:

1. ada $5$ pilihan untuk $v_1$ (karena $v_1 \neq a$),
2. ada $4$ pilihan untuk $v_2$ (karena $v_2 \neq v_1 \neq a$),

Graf yang ditinjau adalah $K_6$ dengan himpunan simpul $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sirkuit Hamilton dengan simpul awal dan akhir $a$ pada graf tersebut pasti berbentuk

$$\langle a, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, a \rangle \, ,$$

dengan $v_i \in V$ untuk setiap $1 \leq i \leq 5$. Karena graf yang ditinjau adalah $K_6$, maka setiap simpul saling bertetangga, akibatnya:

1. ada $5$ pilihan untuk $v_1$ (karena $v_1 \neq a$),
2. ada $4$ pilihan untuk $v_2$ (karena $v_2 \neq v_1 \neq a$),
3. ada $3$ pilihan untuk $v_3$ (karena $v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$),

Graf yang ditinjau adalah $K_6$ dengan himpunan simpul $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sirkuit Hamilton dengan simpul awal dan akhir $a$ pada graf tersebut pasti berbentuk

$$\langle a, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, a \rangle ,$$

dengan $v_i \in V$ untuk setiap $1 \leq i \leq 5$. Karena graf yang ditinjau adalah $K_6$, maka setiap simpul saling bertetangga, akibatnya:

1. ada $5$ pilihan untuk $v_1$ (karena $v_1 \neq a$),
2. ada $4$ pilihan untuk $v_2$ (karena $v_2 \neq v_1 \neq a$),
3. ada $3$ pilihan untuk $v_3$ (karena $v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$),
4. ada $2$ pilihan untuk $v_4$ (karena $v_4 \neq v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$), dan

Graf yang ditinjau adalah $K_6$ dengan himpunan simpul $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sirkuit Hamilton dengan simpul awal dan akhir $a$ pada graf tersebut pasti berbentuk

$$\langle a, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, a \rangle ,$$

dengan $v_i \in V$ untuk setiap $1 \leq i \leq 5$. Karena graf yang ditinjau adalah $K_6$, maka setiap simpul saling bertetangga, akibatnya:

1. ada $5$ pilihan untuk $v_1$ (karena $v_1 \neq a$),
2. ada $4$ pilihan untuk $v_2$ (karena $v_2 \neq v_1 \neq a$),
3. ada $3$ pilihan untuk $v_3$ (karena $v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$),
4. ada $2$ pilihan untuk $v_4$ (karena $v_4 \neq v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$), dan
5. ada $1$ pilihan untuk $v_5$ (karena $v_5 \neq v_4 \neq v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$).

Akibatnya ada sebanyak

Graf yang ditinjau adalah $K_6$ dengan himpunan simpul $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sirkuit Hamilton dengan simpul awal dan akhir $a$ pada graf tersebut pasti berbentuk

$$\langle a, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, a\rangle,$$

dengan $v_i \in V$ untuk setiap $1 \leq i \leq 5$. Karena graf yang ditinjau adalah $K_6$, maka setiap simpul saling bertetangga, akibatnya:

1. ada $5$ pilihan untuk $v_1$ (karena $v_1 \neq a$),
2. ada $4$ pilihan untuk $v_2$ (karena $v_2 \neq v_1 \neq a$),
3. ada $3$ pilihan untuk $v_3$ (karena $v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$),
4. ada $2$ pilihan untuk $v_4$ (karena $v_4 \neq v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$), dan
5. ada $1$ pilihan untuk $v_5$ (karena $v_5 \neq v_4 \neq v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$).

Akibatnya ada sebanyak $5! = 120$ kemungkinan sirkuit.

Graf yang ditinjau adalah $K_6$ dengan himpunan simpul $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Sirkuit Hamilton dengan simpul awal dan akhir $a$ pada graf tersebut pasti berbentuk

$$\langle a, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, a\rangle \,,$$

dengan $v_i \in V$ untuk setiap $1 \leq i \leq 5$. Karena graf yang ditinjau adalah $K_6$, maka setiap simpul saling bertetangga, akibatnya:

1. ada $5$ pilihan untuk $v_1$ (karena $v_1 \neq a$),
2. ada $4$ pilihan untuk $v_2$ (karena $v_2 \neq v_1 \neq a$),
3. ada $3$ pilihan untuk $v_3$ (karena $v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$),
4. ada $2$ pilihan untuk $v_4$ (karena $v_4 \neq v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$), dan
5. ada $1$ pilihan untuk $v_5$ (karena $v_5 \neq v_4 \neq v_3 \neq v_2 \neq v_1 \neq a$).

Akibatnya ada sebanyak $5! = 120$ kemungkinan sirkuit. Namun karena graf yang ditinjau tak berarah, maka sirkuit

$$\langle a, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, a\rangle$$

dianggap sama dengan $\langle a, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, a\rangle$, akibatnya hanya ada $\frac{120}{2} = 60$ sirkuit Hamilton berbeda.

# Banyaknya Sirkuit Hamilton pada $K_n$

**Teorema**

Terdapat $\frac{(n-1)!}{2}$ buah sirkuit Hamilton berbeda pada graf lengkap $K_n$.

**Teorema**

Terdapat $\frac{n-1}{2}$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (himpunan sisi pada sirkuit tak beririsan) pada graf lengkap $K_n$ dengan $n \geq 3$ dan $n$ ganjil.

**Teorema**

Terdapat $\frac{n-2}{2}$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (himpunan sisi pada sirkuit tak beririsan) pada graf lengkap $K_n$ dengan $n \geq 4$ dan $n$ genap.