Koefisien Binomial (Suplemen)

Kuliah Matematika Diskret Semester Genap 2022-2023

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

April 2023

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications*, Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Mathematics for Computer Science*. MIT, 2010, oleh E. Lehman, F. T. Leighton, A. R. Meyer.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 2 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
5. Slide kuliah Matematika Diskret 1 di Fasilkom UI oleh A. A. Krisnadhi.
6. *Slide* kuliah Matematika Diskrit di Telkom University oleh B. Purnama.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke <pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id.

Bahasan

Bahasan

Koefisien Binomial: Motivasi

Di sekolah menengah kita mengenal beberapa ekspresi aljabar berikut:

$$(x+y)^2 \quad =$$

Koefisien Binomial: Motivasi

Di sekolah menengah kita mengenal beberapa ekspresi aljabar berikut:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= \end{aligned}$$

Koefisien Binomial: Motivasi

Di sekolah menengah kita mengenal beberapa ekspresi aljabar berikut:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= x^3 +\end{aligned}$$

Koefisien Binomial: Motivasi

Di sekolah menengah kita mengenal beberapa ekspresi aljabar berikut:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y +
\end{aligned}
$$

Koefisien Binomial: Motivasi

Di sekolah menengah kita mengenal beberapa ekspresi aljabar berikut:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 +
\end{aligned}
$$

Koefisien Binomial: Motivasi

Di sekolah menengah kita mengenal beberapa ekspresi aljabar berikut:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 &= \end{aligned}$$

Koefisien Binomial: Motivasi

Di sekolah menengah kita mengenal beberapa ekspresi aljabar berikut:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4 +
\end{aligned}
$$

Koefisien Binomial: Motivasi

Di sekolah menengah kita mengenal beberapa ekspresi aljabar berikut:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y +
\end{aligned}
$$

Koefisien Binomial: Motivasi

Di sekolah menengah kita mengenal beberapa ekspresi aljabar berikut:

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 +
\end{aligned}$$

Koefisien Binomial: Motivasi

Di sekolah menengah kita mengenal beberapa ekspresi aljabar berikut:

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 +
\end{aligned}$$

Koefisien Binomial: Motivasi

Di sekolah menengah kita mengenal beberapa ekspresi aljabar berikut:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,\end{aligned}$$

ekspresi aljabar apakah yang sama dengan $(x+y)^n$ untuk $n \geq 2$?

Ide Perhitungan Koefisien Ekspansi

Untuk melihat ekspresi aljabar dari $(x+y)^n$ terlebih dulu tinjau cara untuk memperoleh ekspresi aljabar dari $(x+y)^4$ sebagai berikut. Perhatikan bahwa

$$(x+y)^4 = \underbrace{(x+y)}_{S_1}\underbrace{(x+y)}_{S_2}\underbrace{(x+y)}_{S_3}\underbrace{(x+y)}_{S_4}$$

suatu suku hasil penjabaran dari $(x+y)^4$ pastilah memuat:

Ide Perhitungan Koefisien Ekspansi

Untuk melihat ekspresi aljabar dari $(x+y)^n$ terlebih dulu tinjau cara untuk memperoleh ekspresi aljabar dari $(x+y)^4$ sebagai berikut. Perhatikan bahwa

$$(x+y)^4 = \underbrace{(x+y)}_{S_1}\underbrace{(x+y)}_{S_2}\underbrace{(x+y)}_{S_3}\underbrace{(x+y)}_{S_4}$$

suatu suku hasil penjabaran dari $(x+y)^4$ pastilah memuat:

- satu variabel x atau y dari S_1, tetapi tidak keduanya,
- satu variabel x atau y dari S_2, tetapi tidak keduanya,
- satu variabel x atau y dari S_3, tetapi tidak keduanya,
- satu variabel x atau y dari S_4, tetapi tidak keduanya.

Kita dapat menulis ekspresi aljabar dari $(x+y)^4$ sebagai

$$(x+y)^4 \quad =$$

Kita dapat menulis ekspresi aljabar dari $(x+y)^4$ sebagai

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= xxxx + xxxy + xxyx + xxyy + xyxx + xyxy + xyyx + xyyy \\ &\quad + yxxx + yxxy + yxyx + yxyy + yyxx + yyxy + yyyx + yyyy.\end{aligned}$$

Semua suku hasil penjabaran pastilah berbentuk $r_1 r_2 r_3 r_4$ dengan $r_i \in \{x, y\}$ untuk $1 \leq i \leq 4$. Sekarang tinjau beberapa hal berikut:

- Koefisien x^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y.

- Koefisien x^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 0 di antaranya sama dengan y adalah

- Koefisien x^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 0 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{0}$ cara. Atau dapat juga tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{4}$ cara.
- Koefisien x^3y hanya dapat diperoleh bila tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y.

- Koefisien x^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 0 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{0}$ cara. Atau dapat juga tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{4}$ cara.
- Koefisien x^3y hanya dapat diperoleh bila tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 1 di antaranya sama dengan y adalah

- Koefisien x^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 0 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{0}$ cara. Atau dapat juga tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{4}$ cara.
- Koefisien x^3y hanya dapat diperoleh bila tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 1 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{1}$ cara. Atau dapat juga tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{3}$ cara.
- Koefisien x^2y^2 hanya dapat diperoleh bila tepat 2 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y.

- Koefisien x^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 0 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{0}$ cara. Atau dapat juga tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{4}$ cara.
- Koefisien x^3y hanya dapat diperoleh bila tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 1 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{1}$ cara. Atau dapat juga tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{3}$ cara.
- Koefisien x^2y^2 hanya dapat diperoleh bila tepat 2 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 2 di antaranya sama dengan y adalah

- Koefisien x^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 0 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{0}$ cara. Atau dapat juga tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{4}$ cara.
- Koefisien x^3y hanya dapat diperoleh bila tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 1 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{1}$ cara. Atau dapat juga tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{3}$ cara.
- Koefisien x^2y^2 hanya dapat diperoleh bila tepat 2 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 2 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{2}$ cara.
- Koefisien xy^3 hanya dapat diperoleh bila tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y.

- Koefisien x^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 0 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{0}$ cara. Atau dapat juga tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{4}$ cara.
- Koefisien x^3y hanya dapat diperoleh bila tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 1 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{1}$ cara. Atau dapat juga tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{3}$ cara.
- Koefisien x^2y^2 hanya dapat diperoleh bila tepat 2 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 2 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{2}$ cara.
- Koefisien xy^3 hanya dapat diperoleh bila tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 3 di antaranya sama dengan y adalah

- Koefisien x^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 0 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{0}$ cara. Atau dapat juga tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{4}$ cara.
- Koefisien x^3y hanya dapat diperoleh bila tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 1 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{1}$ cara. Atau dapat juga tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{3}$ cara.
- Koefisien x^2y^2 hanya dapat diperoleh bila tepat 2 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 2 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{2}$ cara.
- Koefisien xy^3 hanya dapat diperoleh bila tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 3 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{3}$ cara. Atau dapat juga tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{1}$ cara.
- Koefisien y^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y.

- Koefisien x^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 0 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{0}$ cara. Atau dapat juga tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{4}$ cara.
- Koefisien x^3y hanya dapat diperoleh bila tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 1 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{1}$ cara. Atau dapat juga tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{3}$ cara.
- Koefisien x^2y^2 hanya dapat diperoleh bila tepat 2 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 2 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{2}$ cara.
- Koefisien xy^3 hanya dapat diperoleh bila tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 3 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{3}$ cara. Atau dapat juga tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{1}$ cara.
- Koefisien y^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 4 di antaranya sama dengan y adalah

- Koefisien x^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 0 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{0}$ cara. Atau dapat juga tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{4}$ cara.
- Koefisien x^3y hanya dapat diperoleh bila tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 1 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{1}$ cara. Atau dapat juga tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{3}$ cara.
- Koefisien x^2y^2 hanya dapat diperoleh bila tepat 2 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 2 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{2}$ cara.
- Koefisien xy^3 hanya dapat diperoleh bila tepat 3 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 3 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{3}$ cara. Atau dapat juga tepat 1 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{1}$ cara.
- Koefisien y^4 hanya dapat diperoleh bila tepat 4 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan y. Banyaknya cara memberi nilai r_1, r_2, r_3, r_4 sehingga tepat 4 di antaranya sama dengan y adalah $\binom{4}{4}$ cara. Atau dapat juga tepat 0 dari r_1, r_2, r_3, r_4 sama dengan x, sehingga banyaknya cara adalah $\binom{4}{0}$ cara.

Akibatnya kita memperoleh

$$(x+y)^4 =$$

Akibatnya kita memperoleh

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\
&=
\end{aligned}
$$

Akibatnya kita memperoleh

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\
&= \binom{4}{4}x^4 + \binom{4}{3}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{1}xy^3 + \binom{4}{0}y^4 \\
&=
\end{aligned}
$$

Akibatnya kita memperoleh

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\ &= \binom{4}{4}x^4 + \binom{4}{3}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{1}xy^3 + \binom{4}{0}y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

Bahasan

Teorema Koefisien Binomial

Teorema

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}
&(x+y)^n \\
= \quad & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} x^{n-j} y^j \\
= \quad & \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.
\end{aligned}$$

Bukti (Bukti juga dapat diperoleh dengan induksi matematika.)

Persamaan jelas berlaku bila $n = 1$.

Teorema Koefisien Binomial

Teorema

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned} &(x+y)^n \\ = \quad & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} x^{n-j} y^j \\ = \quad & \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n. \end{aligned}$$

Bukti (Bukti juga dapat diperoleh dengan induksi matematika.)

Persamaan jelas berlaku bila $n = 1$. Selanjutnya misalkan $n \geq 2$.

Teorema Koefisien Binomial

Teorema

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$
\begin{aligned}
& (x+y)^n \\
= \quad & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} x^{n-j} y^j \\
= \quad & \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n .
\end{aligned}
$$

Bukti (Bukti juga dapat diperoleh dengan induksi matematika.)

Persamaan jelas berlaku bila $n = 1$. Selanjutnya misalkan $n \geq 2$. Tanpa memandang sifat komutatif dan asosiatif aritmetika bilangan real, setiap suku dapat ditulis dalam $r_1 r_2 \cdots r_n$ dengan $r_i \in \{x, y\}$, $\forall i \, (1 \leq i \leq n)$.

Teorema Koefisien Binomial

Teorema

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$
\begin{aligned}
& (x+y)^n \\
= & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} x^{n-j} y^j \\
= & \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n .
\end{aligned}
$$

Bukti (Bukti juga dapat diperoleh dengan induksi matematika.)

Persamaan jelas berlaku bila $n = 1$. Selanjutnya misalkan $n \geq 2$. Tanpa memandang sifat komutatif dan asosiatif aritmetika bilangan real, setiap suku dapat ditulis dalam $r_1 r_2 \cdots r_n$ dengan $r_i \in \{x, y\}$, $\forall i \, (1 \leq i \leq n)$. Perhatikan bahwa koefisien dari $x^{n-j} y^j$ dapat diperoleh dari banyaknya cara memberi nilai pada $r_1 r_2 \cdots r_n$ sehingga tepat j buah dari $r_1, r_2 \ldots, r_n$ sama dengan y

Teorema Koefisien Binomial

Teorema

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}
& (x+y)^n \\
= \quad & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} x^{n-j} y^j \\
= \quad & \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.
\end{aligned}$$

Bukti (Bukti juga dapat diperoleh dengan induksi matematika.)

Persamaan jelas berlaku bila $n = 1$. Selanjutnya misalkan $n \geq 2$. Tanpa memandang sifat komutatif dan asosiatif aritmetika bilangan real, setiap suku dapat ditulis dalam $r_1 r_2 \cdots r_n$ dengan $r_i \in \{x, y\}$, $\forall i \, (1 \leq i \leq n)$. Perhatikan bahwa koefisien dari $x^{n-j} y^j$ dapat diperoleh dari banyaknya cara memberi nilai pada $r_1 r_2 \cdots r_n$ sehingga tepat j buah dari $r_1, r_2 \ldots, r_n$ sama dengan y (atau $n - j$ buah dari $r_1, r_2 \ldots, r_n$ sama dengan x).

Teorema Koefisien Binomial

Teorema

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}
&(x+y)^n \\
= \quad & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} x^{n-j} y^j \\
= \quad & \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n.
\end{aligned}$$

Bukti (Bukti juga dapat diperoleh dengan induksi matematika.)

Persamaan jelas berlaku bila $n = 1$. Selanjutnya misalkan $n \geq 2$. Tanpa memandang sifat komutatif dan asosiatif aritmetika bilangan real, setiap suku dapat ditulis dalam $r_1 r_2 \cdots r_n$ dengan $r_i \in \{x, y\}$, $\forall i \, (1 \leq i \leq n)$. Perhatikan bahwa koefisien dari $x^{n-j} y^j$ dapat diperoleh dari banyaknya cara memberi nilai pada $r_1 r_2 \cdots r_n$ sehingga tepat j buah dari $r_1, r_2 \ldots, r_n$ sama dengan y (atau $n - j$ buah dari $r_1, r_2 \ldots, r_n$ sama dengan x). Jadi koefisien dari $x^{n-j} y^j$ adalah $\binom{n}{j}$ (yang sama dengan $\binom{n}{n-j}$)). $\square$

Bahasan

Segitiga dan Identitas Pascal

Di sekolah menengah mungkin Anda pernah berusaha untuk mencari ekspansi dari $(x+y)^n$ dengan segitiga Pascal.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8} \\
\cdots
\end{array}
$$

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}
$$

Identitas Pascal

Teorema

Diberikan bilangan bulat positif n dan k dengan $n > k$ maka $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

Bukti

Bukti dijadikan sebagai salah satu *challenging problems*.

Bahasan

Latihan

Latihan

1. Tentukan koefisien dari x^2y^3 pada ekspansi $(x-y)^5$.
2. Tentukan koefisien dari $x^{12}y^{13}$ pada ekspansi $(2x-3y)^{25}$.
3. Tentukan koefisien dari x^{18} pada ekspansi $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100}$.

Solusi Latihan No 1 dan 2

1. Tinjau bahwa $(x-y)^5 =$

Solusi Latihan No 1 dan 2

1. Tinjau bahwa $(x-y)^5 = (x+(-y))^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (x)^j (-y)^{5-j}$. Koefisien x^2y^3 diperoleh bila $j =$

Solusi Latihan No 1 dan 2

1. Tinjau bahwa $(x-y)^5 = (x+(-y))^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (x)^j (-y)^{5-j}$. Koefisien x^2y^3 diperoleh bila $j=2$, akibatnya suku dengan koefisien x^2y^3 adalah

Solusi Latihan No 1 dan 2

1. Tinjau bahwa $(x-y)^5 = (x+(-y))^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (x)^j (-y)^{5-j}$. Koefisien x^2y^3 diperoleh bila $j=2$, akibatnya suku dengan koefisien x^2y^3 adalah

$$\binom{5}{2} \cdot (x)^2 (-y)^{5-2} =$$

Solusi Latihan No 1 dan 2

1. Tinjau bahwa $(x-y)^5 = (x+(-y))^5 = \sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}(x)^j(-y)^{5-j}$. Koefisien x^2y^3 diperoleh bila $j=2$, akibatnya suku dengan koefisien x^2y^3 adalah

$$\binom{5}{2}\cdot(x)^2(-y)^{5-2} = \binom{5}{2}(x)^2(-y)^3 =$$

Solusi Latihan No 1 dan 2

1. Tinjau bahwa $(x-y)^5 = (x+(-y))^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (x)^j (-y)^{5-j}$. Koefisien x^2y^3 diperoleh bila $j=2$, akibatnya suku dengan koefisien x^2y^3 adalah

$$\binom{5}{2} \cdot (x)^2 (-y)^{5-2} = \binom{5}{2} (x)^2 (-y)^3 = -\binom{5}{2} x^2 y^3.$$

   Jadi koefisien x^2y^3 adalah $-\binom{5}{2} = -10$.

2. Tinjau bahwa $(2x-3y)^{25} =$

Solusi Latihan No 1 dan 2

1. Tinjau bahwa $(x-y)^5 = (x+(-y))^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (x)^j (-y)^{5-j}$. Koefisien x^2y^3 diperoleh bila $j=2$, akibatnya suku dengan koefisien x^2y^3 adalah
$$\binom{5}{2} \cdot (x)^2 (-y)^{5-2} = \binom{5}{2} (x)^2 (-y)^3 = -\binom{5}{2} x^2y^3.$$
Jadi koefisien x^2y^3 adalah $-\binom{5}{2} = -10$.
2. Tinjau bahwa $(2x-3y)^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^j (-3y)^{25-j}$. Koefisien $x^{12}y^{13}$ diperoleh bila $j =$

Solusi Latihan No 1 dan 2

1. Tinjau bahwa $(x-y)^5 = (x+(-y))^5 = \sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}(x)^j(-y)^{5-j}$. Koefisien x^2y^3 diperoleh bila $j=2$, akibatnya suku dengan koefisien x^2y^3 adalah
$$\binom{5}{2}\cdot(x)^2(-y)^{5-2} = \binom{5}{2}(x)^2(-y)^3 = -\binom{5}{2}x^2y^3.$$
Jadi koefisien x^2y^3 adalah $-\binom{5}{2} = -10$.
2. Tinjau bahwa $(2x-3y)^{25} = \sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}(2x)^j(-3y)^{25-j}$. Koefisien $x^{12}y^{13}$ diperoleh bila $j=12$, akibatnya suku dengan koefisien $x^{12}y^{13}$ adalah

Solusi Latihan No 1 dan 2

1. Tinjau bahwa $(x-y)^5 = (x+(-y))^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (x)^j (-y)^{5-j}$. Koefisien x^2y^3 diperoleh bila $j=2$, akibatnya suku dengan koefisien x^2y^3 adalah
$$\binom{5}{2} \cdot (x)^2 (-y)^{5-2} = \binom{5}{2} (x)^2 (-y)^3 = -\binom{5}{2} x^2y^3.$$
Jadi koefisien x^2y^3 adalah $-\binom{5}{2} = -10$.
2. Tinjau bahwa $(2x-3y)^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^j (-3y)^{25-j}$. Koefisien $x^{12}y^{13}$ diperoleh bila $j=12$, akibatnya suku dengan koefisien $x^{12}y^{13}$ adalah
$$\binom{25}{12} \cdot (2x)^{12} (-3y)^{13} \quad =$$

Solusi Latihan No 1 dan 2

1. Tinjau bahwa $(x-y)^5 = (x+(-y))^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (x)^j (-y)^{5-j}$. Koefisien x^2y^3 diperoleh bila $j=2$, akibatnya suku dengan koefisien x^2y^3 adalah

$$\binom{5}{2} \cdot (x)^2 (-y)^{5-2} = \binom{5}{2} (x)^2 (-y)^3 = -\binom{5}{2} x^2 y^3.$$

Jadi koefisien x^2y^3 adalah $-\binom{5}{2} = -10$.

2. Tinjau bahwa $(2x-3y)^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^j (-3y)^{25-j}$. Koefisien $x^{12}y^{13}$ diperoleh bila $j=12$, akibatnya suku dengan koefisien $x^{12}y^{13}$ adalah

$$\begin{aligned} \binom{25}{12} \cdot (2x)^{12} (-3y)^{13} &= \binom{25}{12} \cdot 2^{12} (-3)^{13} \cdot x^{12} y^{13} \\ &= \end{aligned}$$

Solusi Latihan No 1 dan 2

1. Tinjau bahwa $(x-y)^5 = (x+(-y))^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (x)^j (-y)^{5-j}$. Koefisien x^2y^3 diperoleh bila $j=2$, akibatnya suku dengan koefisien x^2y^3 adalah
$$\binom{5}{2} \cdot (x)^2 (-y)^{5-2} = \binom{5}{2} (x)^2 (-y)^3 = -\binom{5}{2} x^2y^3.$$
Jadi koefisien x^2y^3 adalah $-\binom{5}{2} = -10$.

2. Tinjau bahwa $(2x-3y)^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^j (-3y)^{25-j}$. Koefisien $x^{12}y^{13}$ diperoleh bila $j=12$, akibatnya suku dengan koefisien $x^{12}y^{13}$ adalah
$$\begin{aligned}\binom{25}{12} \cdot (2x)^{12} (-3y)^{13} &= \binom{25}{12} \cdot 2^{12} (-3)^{13} \cdot x^{12}y^{13} \\ &= -\binom{25}{12} \cdot 2^{12} \cdot 3^{13} \cdot x^{12}y^{13}.\end{aligned}$$
Jadi koefisien $x^{12}y^{13}$ adalah $-\binom{25}{12} \cdot 2^{12} \cdot 3^{13}$.

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{100} =$

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot \left(x^{100-j}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^{j}$.

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot \left(x^{100-j}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^{j}$. Perhatikan bahwa

$$x^{100-j} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{j} =$$

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot \left(x^{100-j}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^{j}$. Perhatikan bahwa

$$x^{100-j} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{j} = \left(x^{100-j}\right)\left(x^{-1}\right)^{j} =$$

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot \left(x^{100-j}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{j}$. Perhatikan bahwa

$$x^{100-j} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{j} = \left(x^{100-j}\right)\left(x^{-1}\right)^{j} = x^{100-j} \cdot x^{-j} =$$

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot \left(x^{100-j}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^{j}$. Perhatikan bahwa

$$x^{100-j} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{j} = \left(x^{100-j}\right) \left(x^{-1}\right)^{j} = x^{100-j} \cdot x^{-j} = x^{100-2j}.$$

Jadi $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot x^{100-2j}$.

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot \left(x^{100-j}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^{j}$. Perhatikan bahwa

$$x^{100-j} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{j} = \left(x^{100-j}\right)\left(x^{-1}\right)^{j} = x^{100-j} \cdot x^{-j} = x^{100-2j}.$$

Jadi $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot x^{100-2j}$. Koefisien dari x^{18} diperoleh bila

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot \left(x^{100-j}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^{j}$. Perhatikan bahwa

$$x^{100-j} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{j} = \left(x^{100-j}\right) \left(x^{-1}\right)^{j} = x^{100-j} \cdot x^{-j} = x^{100-2j}.$$

Jadi $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot x^{100-2j}$. Koefisien dari x^{18} diperoleh bila $100-2j =$

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100}=\sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}\cdot\left(x^{100-j}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{j}$. Perhatikan bahwa

$$x^{100-j}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{j}=\left(x^{100-j}\right)\left(x^{-1}\right)^{j}=x^{100-j}\cdot x^{-j}=x^{100-2j}.$$

Jadi $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100}=\sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}\cdot x^{100-2j}$. Koefisien dari x^{18} diperoleh bila $100-2j=18$,

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100}=\sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}\cdot\left(x^{100-j}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{j}$. Perhatikan bahwa

$$x^{100-j}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{j}=\left(x^{100-j}\right)\left(x^{-1}\right)^{j}=x^{100-j}\cdot x^{-j}=x^{100-2j}.$$

Jadi $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100}=\sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}\cdot x^{100-2j}$. Koefisien dari x^{18} diperoleh bila $100-2j=18$, akibatnya $2j=82\Rightarrow j=41$.

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot \left(x^{100-j}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{j}$. Perhatikan bahwa

$$x^{100-j} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{j} = \left(x^{100-j}\right)\left(x^{-1}\right)^{j} = x^{100-j} \cdot x^{-j} = x^{100-2j}.$$

Jadi $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot x^{100-2j}$. Koefisien dari x^{18} diperoleh bila $100-2j=18$, akibatnya $2j=82 \Rightarrow j=41$. Jadi koefisien x^{18} adalah $\binom{100}{41} = \binom{100}{59} =$

Solusi Latihan No 3

3. Tinjau bahwa $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot \left(x^{100-j}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^{j}$. Perhatikan bahwa

$$x^{100-j} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{j} = \left(x^{100-j}\right)\left(x^{-1}\right)^{j} = x^{100-j} \cdot x^{-j} = x^{100-2j}.$$

Jadi $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} \cdot x^{100-2j}$. Koefisien dari x^{18} diperoleh bila $100-2j=18$, akibatnya $2j=82 \Rightarrow j=41$. Jadi koefisien x^{18} adalah $\binom{100}{41} = \binom{100}{59} = 20\,116\,440\,213\,369\,968\,050\,635\,175\,200$.

Bahasan

Challenging Problems

Challenging Problems

1. Bentuk tertutup (*closed form*) dari suatu ekspresi matematika merupakan ekspresi yang tidak menggunakan notasi sigma atau penjumlahan suku-suku yang nilainya berubah pada domain tertentu. Sebagai contoh, di sekolah menengah kita mengenal beberapa bentuk berikut:
   - $1+2+3+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{(n)(n+1)}{2}$, ekspresi $\frac{(n)(n+1)}{2}$ adalah bentuk tertutup dari $\sum_{i=1}^{n} i$,
   - $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$, nilai 2 adalah bentuk tertutup dari $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}$.

   Tuliskan bentuk tertutup dari

   1. $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$
   2. $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j}$
   3. $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^{j}$
2. Berikan suatu bukti matematis untuk identitas Pascal.