Permutasi dan Kombinasi yang Diperumum

Kuliah Matematika Diskret Semester Genap 2022-2023

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

April 2023

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications*, Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Mathematics for Computer Science*. MIT, 2010, oleh E. Lehman, F. T. Leighton, A. R. Meyer.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 2 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
5. Slide kuliah Matematika Diskret 1 di Fasilkom UI oleh A. A. Krisnadhi.
6. *Slide* kuliah Matematika Diskrit di Telkom University oleh B. Purnama.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke <pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id.

Bahasan

1. Permutasi dengan Pengulangan
2. Permutasi dengan Objek Identik
3. Kombinasi dengan Pengulangan
4. Challenging Problems
5. Ringkasan Rumus

Bahasan

Permutasi dengan Pengulangan

Definisi (Permutasi dengan Pengulangan)

Permutasi dengan pengulangan merupakan permutasi yang membolehkan objek yang sama muncul lebih dari sekali.

Contoh

Berapa banyak string dengan panjang 10 yang dapat dibentuk hanya dari **huruf kapital saja** bila masing-masing huruf kapital boleh dipakai lebih dari sekali?

Solusi:

Permutasi dengan Pengulangan

Definisi (Permutasi dengan Pengulangan)

Permutasi dengan pengulangan merupakan permutasi yang membolehkan objek yang sama muncul lebih dari sekali.

Contoh

Berapa banyak string dengan panjang 10 yang dapat dibentuk hanya dari **huruf kapital saja** bila masing-masing huruf kapital boleh dipakai lebih dari sekali?

Solusi: Misalkan string tersebut adalah $s_1 s_2 \cdots s_{10}$.

Permutasi dengan Pengulangan

Definisi (Permutasi dengan Pengulangan)

Permutasi dengan pengulangan merupakan permutasi yang membolehkan objek yang sama muncul lebih dari sekali.

Contoh

Berapa banyak string dengan panjang 10 yang dapat dibentuk hanya dari **huruf kapital saja** bila masing-masing huruf kapital boleh dipakai lebih dari sekali?

Solusi: Misalkan string tersebut adalah $s_1 s_2 \cdots s_{10}$. Karena ada 26 huruf kapital dan setiap huruf dapat digunakan berulang, maka ada sebanyak

Permutasi dengan Pengulangan

Definisi (Permutasi dengan Pengulangan)

Permutasi dengan pengulangan merupakan permutasi yang membolehkan objek yang sama muncul lebih dari sekali.

Contoh

Berapa banyak string dengan panjang 10 yang dapat dibentuk hanya dari **huruf kapital saja** bila masing-masing huruf kapital boleh dipakai lebih dari sekali?

Solusi: Misalkan string tersebut adalah $s_1 s_2 \cdots s_{10}$. Karena ada 26 huruf kapital dan setiap huruf dapat digunakan berulang, maka ada sebanyak 26 kemungkinan untuk masing-masing karakter s_i $(1 \leq i \leq 10)$.

Permutasi dengan Pengulangan

Definisi (Permutasi dengan Pengulangan)

Permutasi dengan pengulangan merupakan permutasi yang membolehkan objek yang sama muncul lebih dari sekali.

Contoh

Berapa banyak string dengan panjang 10 yang dapat dibentuk hanya dari **huruf kapital saja** bila masing-masing huruf kapital boleh dipakai lebih dari sekali?

Solusi: Misalkan string tersebut adalah $s_1 s_2 \cdots s_{10}$. Karena ada 26 huruf kapital dan setiap huruf dapat digunakan berulang, maka ada sebanyak 26 kemungkinan untuk masing-masing karakter s_i $(1 \leq i \leq 10)$. Berdasarkan aturan perkalian, ada sebanyak

Permutasi dengan Pengulangan

Definisi (Permutasi dengan Pengulangan)

Permutasi dengan pengulangan merupakan permutasi yang membolehkan objek yang sama muncul lebih dari sekali.

Contoh

Berapa banyak string dengan panjang 10 yang dapat dibentuk hanya dari **huruf kapital saja** bila masing-masing huruf kapital boleh dipakai lebih dari sekali?

Solusi: Misalkan string tersebut adalah $s_1 s_2 \cdots s_{10}$. Karena ada 26 huruf kapital dan setiap huruf dapat digunakan berulang, maka ada sebanyak 26 kemungkinan untuk masing-masing karakter s_i $(1 \leq i \leq 10)$. Berdasarkan aturan perkalian, ada sebanyak 26^{10} string dengan panjang 10 yang dapat dibentuk dari huruf kapital.

Teorema (Banyaknya Permutasi dengan Pengulangan)

Banyaknya permutasi-r dari himpunan dengan n anggota yang membolehkan pengulangan adalah n^r.

Bukti

Cukup jelas (gunakan aturan perkalian). $\square$

Bahasan

Permutasi dengan Objek Identik

Definisi

Permutasi dengan objek identik adalah permutasi dari n objek yang terdiri atas tepat k jenis objek identik.

Teorema

Diberikan sekumpulan objek yang terdiri atas k jenis, jika masing-masing jenis secara berurutan memuat sebanyak $n_1, n_2, \cdots, n_k$ objek identik, maka banyaknya permutasi berbeda dari objek-objek tersebut adalah

$$\frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!}{n_1! n_2! \cdots n_k!},$$

terkadang ekspresi di atas ditulis sebagai $P(n; n_1, \ldots, n_k)$.

Bukti

Bukti dapat diperoleh dengan mudah melalui aturan perkalian dan pembagian. Bukti detail diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Latihan 1

Latihan

1. Tentukan banyaknya string berbeda yang dapat dibentuk dari semua huruf pada kata **ZOOKEEPER** bila semua huruf pada string tersebut harus dipakai.
2. Tentukan banyaknya string berbeda yang dapat dibentuk dari semua huruf pada kata **MISSISSIPPI** bila semua huruf pada string tersebut harus dipakai.
3. Di sebuah rak ada 8 buku yang terdiri atas 4 buku algoritma, 2 buku matematika diskrit, dan 2 buku statistika. Tentukan banyaknya cara pengaturan buku yang berbeda di rak tersebut.

Solusi Soal Latihan 1

1. Misalkan semua karakter pada **ZOOKEEPER** dianggap berbeda, yaitu **Z**$\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$**K**$\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$**P**$\mathbf{E}_3$**R**, maka terdapat 9 karakter berbeda.

Solusi Soal Latihan 1

1. Misalkan semua karakter pada **ZOOKEEPER** dianggap berbeda, yaitu **Z**$\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$**K**$\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$**P**$\mathbf{E}_3$**R**, maka terdapat 9 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya susunan string adalah $9!$.

Solusi Soal Latihan 1

1. Misalkan semua karakter pada **ZOOKEEPER** dianggap berbeda, yaitu **Z**$\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$**K**$\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$**P**$\mathbf{E}_3$**R**, maka terdapat 9 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya sususan string adalah $9!$. Karena terdapat $2!$ cara untuk menomori huruf **O** dan $3!$ cara untuk menomori huruf **E**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak

Solusi Soal Latihan 1

1. Misalkan semua karakter pada **ZOOKEEPER** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{ZO}_1\mathbf{O}_2\mathbf{KE}_1\mathbf{E}_2\mathbf{PE}_3\mathbf{R}$, maka terdapat 9 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya susuan string adalah $9!$. Karena terdapat $2!$ cara untuk menomori huruf **O** dan $3!$ cara untuk menomori huruf **E**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{9!}{2!3!} = 30\,240$.
2. Misalkan semua karakter pada **MISSISSIPPI** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{MI}_1\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\mathbf{I}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4\mathbf{I}_3\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{I}_4$, maka terdapat 11 karakter berbeda.

Solusi Soal Latihan 1

1. Misalkan semua karakter pada **ZOOKEEPER** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{ZO}_1\mathbf{O}_2\mathbf{KE}_1\mathbf{E}_2\mathbf{PE}_3\mathbf{R}$, maka terdapat 9 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya susunan string adalah $9!$. Karena terdapat $2!$ cara untuk menomori huruf **O** dan $3!$ cara untuk menomori huruf **E**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{9!}{2!3!} = 30\,240$.
2. Misalkan semua karakter pada **MISSISSIPPI** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{MI}_1\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\mathbf{I}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4\mathbf{I}_3\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{I}_4$, maka terdapat 11 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya susunan string adalah $11!$. Karena terdapat $4!$ cara untuk menomori huruf **I**, $4!$ cara untuk menomori huruf **S**, dan $2!$ cara untuk menomori huruf **P**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak

Solusi Soal Latihan 1

1. Misalkan semua karakter pada **ZOOKEEPER** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{ZO}_1\mathbf{O}_2\mathbf{KE}_1\mathbf{E}_2\mathbf{PE}_3\mathbf{R}$, maka terdapat 9 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya susunan string adalah $9!$. Karena terdapat $2!$ cara untuk menomori huruf **O** dan $3!$ cara untuk menomori huruf **E**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{9!}{2!3!} = 30\,240$.
2. Misalkan semua karakter pada **MISSISSIPPI** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{MI}_1\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\mathbf{I}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4\mathbf{I}_3\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{I}_4$, maka terdapat 11 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya susunan string adalah $11!$. Karena terdapat $4!$ cara untuk menomori huruf **I**, $4!$ cara untuk menomori huruf **S**, dan $2!$ cara untuk menomori huruf **P**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{11!}{4!4!2!} = 34\,650$.
3. Misalkan buku algoritma ditulis dengan $\mathbf{A}$, buku matematika diskrit ditulis dengan $\mathbf{M}$, dan buku statistika ditulis dengan $\mathbf{S}$.

Solusi Soal Latihan 1

1. Misalkan semua karakter pada **ZOOKEEPER** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{ZO_1O_2KE_1E_2PE_3R}$, maka terdapat 9 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya sususan string adalah $9!$. Karena terdapat $2!$ cara untuk menomori huruf **O** dan $3!$ cara untuk menomori huruf **E**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{9!}{2!3!} = 30\,240$.
2. Misalkan semua karakter pada **MISSISSIPPI** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{MI_1S_1S_2I_2S_3S_4I_3P_1P_2I_4}$, maka terdapat 11 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya susunan string adalah $11!$. Karena terdapat $4!$ cara untuk menomori huruf **I**, $4!$ cara untuk menomori huruf **S**, dan $2!$ cara untuk menomori huruf **P**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{11!}{4!4!2!} = 34\,650$.
3. Misalkan buku algoritma ditulis dengan $\mathbf{A}$, buku matematika diskrit ditulis dengan $\mathbf{M}$, dan buku statistika ditulis dengan $\mathbf{S}$. Jika semua buku dianggap berbeda, maka susunan buku pada rak dapat dinyatakan sebagai permutasi dari string $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$.

Solusi Soal Latihan 1

1. Misalkan semua karakter pada **ZOOKEEPER** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{ZO_1O_2KE_1E_2PE_3R}$, maka terdapat 9 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya sususan string adalah $9!$. Karena terdapat $2!$ cara untuk menomori huruf **O** dan $3!$ cara untuk menomori huruf **E**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{9!}{2!3!} = 30\,240$.
2. Misalkan semua karakter pada **MISSISSIPPI** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{MI_1S_1S_2I_2S_3S_4I_3P_1P_2I_4}$, maka terdapat 11 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya susunan string adalah $11!$. Karena terdapat $4!$ cara untuk menomori huruf **I**, $4!$ cara untuk menomori huruf **S**, dan $2!$ cara untuk menomori huruf **P**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{11!}{4!4!2!} = 34\,650$.
3. Misalkan buku algoritma ditulis dengan $\mathbf{A}$, buku matematika diskrit ditulis dengan $\mathbf{M}$, dan buku statistika ditulis dengan $\mathbf{S}$. Jika semua buku dianggap berbeda, maka susunan buku pada rak dapat dinyatakan sebagai permutasi dari string $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$. Banyaknya susunan buku jika semua buku dianggap berbeda adalah $8!$.

Solusi Soal Latihan 1

1. Misalkan semua karakter pada **ZOOKEEPER** dianggap berbeda, yaitu $\textbf{ZO}_1\textbf{O}_2\textbf{KE}_1\textbf{E}_2\textbf{PE}_3\textbf{R}$, maka terdapat 9 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya sususan string adalah $9!$. Karena terdapat $2!$ cara untuk menomori huruf **O** dan $3!$ cara untuk menomori huruf **E**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{9!}{2!3!} = 30\,240$.
2. Misalkan semua karakter pada **MISSISSIPPI** dianggap berbeda, yaitu $\textbf{MI}_1\textbf{S}_1\textbf{S}_2\textbf{I}_2\textbf{S}_3\textbf{S}_4\textbf{I}_3\textbf{P}_1\textbf{P}_2\textbf{I}_4$, maka terdapat 11 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya susunan string adalah $11!$. Karena terdapat $4!$ cara untuk menomori huruf **I**, $4!$ cara untuk menomori huruf **S**, dan $2!$ cara untuk menomori huruf **P**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{11!}{4!4!2!} = 34\,650$.
3. Misalkan buku algoritma ditulis dengan $\mathbf{A}$, buku matematika diskrit ditulis dengan $\mathbf{M}$, dan buku statistika ditulis dengan $\mathbf{S}$. Jika semua buku dianggap berbeda, maka susunan buku pada rak dapat dinyatakan sebagai permutasi dari string $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$. Banyaknya susunan buku jika semua buku dianggap berbeda adalah $8!$. Karena terdapat $4!$ cara untuk menomori buku $\mathbf{A}$, $2!$ cara untuk menomori buku $\mathbf{M}$, dan $2!$ cara untuk menomori buku $\mathbf{S}$, maka terdapat

Solusi Soal Latihan 1

1. Misalkan semua karakter pada **ZOOKEEPER** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{ZO_1O_2KE_1E_2PE_3R}$, maka terdapat 9 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya sususan string adalah $9!$. Karena terdapat $2!$ cara untuk menomori huruf **O** dan $3!$ cara untuk menomori huruf **E**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{9!}{2!3!} = 30\,240$.
2. Misalkan semua karakter pada **MISSISSIPPI** dianggap berbeda, yaitu $\mathbf{MI_1S_1S_2I_2S_3S_4I_3P_1P_2I_4}$, maka terdapat 11 karakter berbeda. Jika semua karakter dinomori, maka banyaknya susunan string adalah $11!$. Karena terdapat $4!$ cara untuk menomori huruf **I**, $4!$ cara untuk menomori huruf **S**, dan $2!$ cara untuk menomori huruf **P**, maka dengan aturan pembagian banyaknya susunan string yang berbeda adalah sebanyak $\frac{11!}{4!4!2!} = 34\,650$.
3. Misalkan buku algoritma ditulis dengan $\mathbf{A}$, buku matematika diskrit ditulis dengan $\mathbf{M}$, dan buku statistika ditulis dengan $\mathbf{S}$. Jika semua buku dianggap berbeda, maka susunan buku pada rak dapat dinyatakan sebagai permutasi dari string $\mathbf{A_1A_2A_3A_4M_1M_2S_1S_2}$. Banyaknya susunan buku jika semua buku dianggap berbeda adalah $8!$. Karena terdapat $4!$ cara untuk menomori buku $\mathbf{A}$, $2!$ cara untuk menomori buku $\mathbf{M}$, dan $2!$ cara untuk menomori buku $\mathbf{S}$, maka terdapat $\frac{8!}{4!2!2!} = 420$ pengaturan buku yang berbeda.

Bahasan

Motivasi: Kombinasi dengan Pengulangan

- Kita telah melihat sebelumnya bahwa jika diberikan suatu himpunan A yang memuat n anggota, maka terdapat $\binom{n}{k}$ cara berbeda untuk mengkonstruksi himpunan bagian dari A yang memuat tepat k anggota.
- Dalam hal ini pengulangan tidak diperbolehkan, artinya jika suatu unsur x telah diambil dari A, maka x **tidak boleh diambil lagi** dari A. Bagaimana jika pengulangan dibolehkan?

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*):

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama:

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4$ apel$\}$, $\{4$ jeruk$\}$, atau $\{4$ melon$\}$;

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4$ apel$\}$, $\{4$ jeruk$\}$, atau $\{4$ melon$\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda:

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4 \text{ apel}\}$, $\{4 \text{ jeruk}\}$, atau $\{4 \text{ melon}\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda: $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$, $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$,

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4 \text{ apel}\}$, $\{4 \text{ jeruk}\}$, atau $\{4 \text{ melon}\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda: $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$, $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$,

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4 \text{ apel}\}$, $\{4 \text{ jeruk}\}$, atau $\{4 \text{ melon}\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda: $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$, $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ melon}, \ 1 \text{ jeruk}\}$;

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4 \text{ apel}\}$, $\{4 \text{ jeruk}\}$, atau $\{4 \text{ melon}\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda: $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$, $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ jeruk}\}$;
- 2 jenis buah, masing-masing 2 buah dari jenis yang sama:

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4 \text{ apel}\}$, $\{4 \text{ jeruk}\}$, atau $\{4 \text{ melon}\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda: $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$, $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ melon}, \ 1 \text{ jeruk}\}$;
- 2 jenis buah, masing-masing 2 buah dari jenis yang sama: $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ jeruk}\}$,

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4 \text{ apel}\}$, $\{4 \text{ jeruk}\}$, atau $\{4 \text{ melon}\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda: $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$, $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ melon}, \ 1 \text{ jeruk}\}$;
- 2 jenis buah, masing-masing 2 buah dari jenis yang sama: $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ jeruk}\}$, $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ melon}\}$,

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4 \text{ apel}\}$, $\{4 \text{ jeruk}\}$, atau $\{4 \text{ melon}\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda: $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$, $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ melon}, \ 1 \text{ jeruk}\}$;
- 2 jenis buah, masing-masing 2 buah dari jenis yang sama: $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ jeruk}\}$, $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ melon}\}$, $\{2 \text{ jeruk}, 2 \text{ melon}\}$;

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4 \text{ apel}\}$, $\{4 \text{ jeruk}\}$, atau $\{4 \text{ melon}\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda: $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$, $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ jeruk}\}$;
- 2 jenis buah, masing-masing 2 buah dari jenis yang sama: $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ jeruk}\}$, $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ melon}\}$, $\{2 \text{ jeruk}, 2 \text{ melon}\}$;
- 3 jenis buah, setidaknya 2 buah dari jenis yang sama:

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4 \text{ apel}\}$, $\{4 \text{ jeruk}\}$, atau $\{4 \text{ melon}\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda: $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$, $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ melon}, \ 1 \text{ jeruk}\}$;
- 2 jenis buah, masing-masing 2 buah dari jenis yang sama: $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ jeruk}\}$, $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ melon}\}$, $\{2 \text{ jeruk}, 2 \text{ melon}\}$;
- 3 jenis buah, setidaknya 2 buah dari jenis yang sama: $\{2 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$,

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4 \text{ apel}\}$, $\{4 \text{ jeruk}\}$, atau $\{4 \text{ melon}\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda: $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$, $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ melon}, \ 1 \text{ jeruk}\}$;
- 2 jenis buah, masing-masing 2 buah dari jenis yang sama: $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ jeruk}\}$, $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ melon}\}$, $\{2 \text{ jeruk}, 2 \text{ melon}\}$;
- 3 jenis buah, setidaknya 2 buah dari jenis yang sama: $\{2 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$, $\{2 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$,

Contoh Kasus Kombinasi dengan Pengulangan

Contoh

Anda berjalan-jalan ke sebuah swalayan yang menjual 3 jenis buah, yaitu apel, jeruk, dan melon. Ada berapa banyak cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut (urutan pengambilan tidak diperhatikan dan asumsikan setiap jenis buah yang sama identik)?

Solusi (versi *nguli*/ *brute force*): kombinasi yang mungkin adalah

- Semuanya dari jenis yang sama: $\{4 \text{ apel}\}$, $\{4 \text{ jeruk}\}$, atau $\{4 \text{ melon}\}$;
- 3 buah sama, 1 buah berbeda: $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$, $\{3 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ apel}\}$, $\{3 \text{ melon}, 1 \text{ jeruk}\}$;
- 2 jenis buah, masing-masing 2 buah dari jenis yang sama: $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ jeruk}\}$, $\{2 \text{ apel}, 2 \text{ melon}\}$, $\{2 \text{ jeruk}, 2 \text{ melon}\}$;
- 3 jenis buah, setidaknya 2 buah dari jenis yang sama: $\{2 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}, 1 \text{ melon}\}$, $\{2 \text{ jeruk}, 1 \text{ apel}, 1 \text{ melon}\}$, $\{2 \text{ melon}, 1 \text{ apel}, 1 \text{ jeruk}\}$.

Jadi ada $3 + 6 + 3 + 3 = 15$ cara untuk memilih 4 buah yang berisi kombinasi 3 buah tersebut.

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b.

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 2 jeruk, dan 1 melon;
- $b - b - bb$

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 2 jeruk, dan 1 melon;
- $b - b - bb$ menyatakan bahwa terdapat

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 2 jeruk, dan 1 melon;
- $b - b - bb$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 1 jeruk, dan 2 melon;
- $bb - bb -$

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 2 jeruk, dan 1 melon;
- $b - b - bb$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 1 jeruk, dan 2 melon;
- $bb - bb-$ menyatakan bahwa terdapat

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 2 jeruk, dan 1 melon;
- $b - b - bb$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 1 jeruk, dan 2 melon;
- $bb - bb-$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 2 apel dan 2 jeruk;
- $-bbb - b$

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 2 jeruk, dan 1 melon;
- $b - b - bb$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 1 jeruk, dan 2 melon;
- $bb - bb-$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 2 apel dan 2 jeruk;
- $-bbb - b$ menyatakan bahwa terdapat

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 2 jeruk, dan 1 melon;
- $b - b - bb$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 1 jeruk, dan 2 melon;
- $bb - bb-$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 2 apel dan 2 jeruk;
- $-bbb - b$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 3 jeruk dan 1 melon;
- $bbbb - -$

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 2 jeruk, dan 1 melon;
- $b - b - bb$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 1 jeruk, dan 2 melon;
- $bb - bb-$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 2 apel dan 2 jeruk;
- $-bbb - b$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 3 jeruk dan 1 melon;
- $bbbb - -$ menyatakan bahwa terdapat

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 2 jeruk, dan 1 melon;
- $b - b - bb$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 1 jeruk, dan 2 melon;
- $bb - bb-$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 2 apel dan 2 jeruk;
- $-bbb - b$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 3 jeruk dan 1 melon;
- $bbbb - -$ menyatakan bahwa terdapat 1 jenis buah: 4 apel.
- $- - bbbb$

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 2 jeruk, dan 1 melon;
- $b - b - bb$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 1 jeruk, dan 2 melon;
- $bb - bb-$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 2 apel dan 2 jeruk;
- $-bbb - b$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 3 jeruk dan 1 melon;
- $bbbb - -$ menyatakan bahwa terdapat 1 jenis buah: 4 apel.
- $- - bbbb$ menyatakan bahwa terdapat

Solusi (versi *tricky*): Misalkan setiap buah dinotasikan dengan b. Untuk setiap buah dengan jenis berbeda, kita meletakkan tanda "$-$" sebagai pemisah, sebagai contoh:

- $b - bb - b$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 2 jeruk, dan 1 melon;
- $b - b - bb$ menyatakan bahwa terdapat 3 jenis buah: 1 apel, 1 jeruk, dan 2 melon;
- $bb - bb-$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 2 apel dan 2 jeruk;
- $-bbb - b$ menyatakan bahwa terdapat 2 jenis buah: 3 jeruk dan 1 melon;
- $bbbb - -$ menyatakan bahwa terdapat 1 jenis buah: 4 apel.
- $- - bbbb$ menyatakan bahwa terdapat 1 jenis buah: 4 melon.

Dengan memperhatikan urutan dari setiap objek (yaitu 4 huruf b dan 2 tanda $-$) maka terdapat $\underbrace{4}_{\#\text{ buah}} + \underbrace{2}_{\#\text{ tanda } -} = 6$ objek yang dipertukarkan posisinya.

Dengan memperhatikan urutan dari setiap objek (yaitu 4 huruf b dan 2 tanda $-$) maka terdapat $\underbrace{4}_{\#\text{ buah}} + \underbrace{2}_{\#\text{ tanda } -} = 6$ objek yang dipertukarkan posisinya. Kita memperoleh $6!$ cara penempatan objek bila huruf b dan tanda $-$ dibedakan. Perhatikan bahwa:

Dengan memperhatikan urutan dari setiap objek (yaitu 4 huruf b dan 2 tanda $-$) maka terdapat $\underbrace{4}_{\#\text{ buah}} + \underbrace{2}_{\#\text{ tanda }-} = 6$ objek yang dipertukarkan posisinya. Kita memperoleh $6!$ cara penempatan objek bila huruf b dan tanda $-$ dibedakan. Perhatikan bahwa:

- ada 2 tanda $-$ identik (ada $2!$ cara penempatan yang sama untuk $-$)

Dengan memperhatikan urutan dari setiap objek (yaitu 4 huruf b dan 2 tanda $-$) maka terdapat $\underbrace{4}_{\#\text{ buah}} + \underbrace{2}_{\#\text{ tanda } -} = 6$ objek yang dipertukarkan posisinya. Kita memperoleh $6!$ cara penempatan objek bila huruf b dan tanda $-$ dibedakan. Perhatikan bahwa:

- ada 2 tanda $-$ identik (ada $2!$ cara penempatan yang sama untuk $-$)
- ada 4 huruf b identik (ada $4!$ cara penempatan yang sama untuk b).

Menurut aturan pembagian, banyaknya cara penempatan 6 objek tersebut tanpa membedakan huruf b dan tanda $-$ yang ada adalah

Dengan memperhatikan urutan dari setiap objek (yaitu 4 huruf b dan 2 tanda $-$) maka terdapat $\underbrace{4}_{\#\text{ buah}} + \underbrace{2}_{\#\text{ tanda }-} = 6$ objek yang dipertukarkan posisinya. Kita memperoleh $6!$ cara penempatan objek bila huruf b dan tanda $-$ dibedakan. Perhatikan bahwa:

- ada 2 tanda $-$ identik (ada $2!$ cara penempatan yang sama untuk $-$)
- ada 4 huruf b identik (ada $4!$ cara penempatan yang sama untuk b).

Menurut aturan pembagian, banyaknya cara penempatan 6 objek tersebut tanpa membedakan huruf b dan tanda $-$ yang ada adalah $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ cara.

Kombinasi dengan Pengulangan

Definisi (Kombinasi dengan Pengulangan)

Kombinasi-r dengan pengulangan merupakan banyaknya cara mengambil r objek dari n **jenis** objek berbeda yang membolehkan setiap jenis objek diambil hingga r kali.

Contoh

Tentukan banyaknya solusi persamaan $x + y + z = 11$ dengan syarat $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Sebagai contoh, berikut adalah beberapa nilai x, y, dan z yang memenuhi:

- $x = 0$, $y = 0$, $z = 11$,
- $x = 0$, $y = 1$, $z = 10$,
- $x = 1$, $y = 0$, $z = 10$,
- $\vdots$
- $x = 4$, $y = 4$, $z = 3$, dan lain-lain.

Solusi: Perhatikan bahwa nilai dari x, y, z yang mungkin adalah $0 \leq x, y, z \leq 11$ dan $x, y, z \in \mathbb{N}_0$.

Solusi: Perhatikan bahwa nilai dari x, y, z yang mungkin adalah $0 \leq x, y, z \leq 11$ dan $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x, y, z direpresentasikan dengan banyaknya angka 1

Solusi: Perhatikan bahwa nilai dari x, y, z yang mungkin adalah $0 \leq x, y, z \leq 11$ dan $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x, y, z direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$.

Solusi: Perhatikan bahwa nilai dari x, y, z yang mungkin adalah $0 \leq x, y, z \leq 11$ dan $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x, y, z direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Sebagai contoh:

- $1111 - 1111 - 111$ menyatakan nilai $x =$

Solusi: Perhatikan bahwa nilai dari x, y, z yang mungkin adalah $0 \leq x, y, z \leq 11$ dan $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x, y, z direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Sebagai contoh:

- $1111 - 1111 - 111$ menyatakan nilai $x = 4$, nilai $y =$

Solusi: Perhatikan bahwa nilai dari x, y, z yang mungkin adalah $0 \leq x, y, z \leq 11$ dan $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x, y, z direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Sebagai contoh:

- $1111 - 1111 - 111$ menyatakan nilai $x = 4$, nilai $y = 4$, dan nilai $z =$

Solusi: Perhatikan bahwa nilai dari x, y, z yang mungkin adalah $0 \leq x, y, z \leq 11$ dan $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x, y, z direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Sebagai contoh:

- $1111 - 1111 - 111$ menyatakan nilai $x = 4$, nilai $y = 4$, dan nilai $z = 3$.
- $11 - 111 - 111111$ menyatakan nilai $x =$

Solusi: Perhatikan bahwa nilai dari x, y, z yang mungkin adalah $0 \leq x, y, z \leq 11$ dan $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x, y, z direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Sebagai contoh:

- $1111 - 1111 - 111$ menyatakan nilai $x = 4$, nilai $y = 4$, dan nilai $z = 3$.
- $11 - 111 - 111111$ menyatakan nilai $x = 2$, nilai $y =$

Solusi: Perhatikan bahwa nilai dari x, y, z yang mungkin adalah $0 \leq x, y, z \leq 11$ dan $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x, y, z direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Sebagai contoh:

- $1111 - 1111 - 111$ menyatakan nilai $x = 4$, nilai $y = 4$, dan nilai $z = 3$.
- $11 - 111 - 111111$ menyatakan nilai $x = 2$, nilai $y = 3$, dan nilai $z =$

Solusi: Perhatikan bahwa nilai dari x, y, z yang mungkin adalah $0 \leq x, y, z \leq 11$ dan $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x, y, z direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Sebagai contoh:

- $1111 - 1111 - 111$ menyatakan nilai $x = 4$, nilai $y = 4$, dan nilai $z = 3$.
- $11 - 111 - 111111$ menyatakan nilai $x = 2$, nilai $y = 3$, dan nilai $z = 6$

Banyaknya solusi merupakan banyaknya permutasi berbeda dari string $\underbrace{111 \cdots 1}_{11 \text{ angka } 1} - -$. Melalui aturan perkalian dan pembagian, banyaknya permutasi yang berbeda adalah

Solusi: Perhatikan bahwa nilai dari x, y, z yang mungkin adalah $0 \leq x, y, z \leq 11$ dan $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x, y, z direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Sebagai contoh:

- $1111 - 1111 - 111$ menyatakan nilai $x = 4$, nilai $y = 4$, dan nilai $z = 3$.
- $11 - 111 - 111111$ menyatakan nilai $x = 2$, nilai $y = 3$, dan nilai $z = 6$

Banyaknya solusi merupakan banyaknya permutasi berbeda dari string $\underbrace{111\cdots1}_{\text{11 angka 1}} - -$. Melalui aturan perkalian dan pembagian, banyaknya permutasi yang berbeda adalah

$$\frac{(11+2)!}{11! \cdot 2!} = 78$$

Jadi ada 78 solusi berbeda dari persamaan $x + y + z = 11$ dengan syarat $x, y, z \in \mathbb{N}_0$.

Latihan 2

Latihan

1. Tentukan banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ jika $x_i \in \mathbb{N}_0$ untuk semua $1 \leq i \leq n$.
2. Tentukan banyaknya cara membagikan 1 lusin donat identik ke dalam 4 kotak berbeda apabila:
   1. boleh ada kotak yang kosong
   2. tidak boleh ada kotak yang kosong

   Dengan syarat semua donat pada 1 lusin donat tersebut harus masuk ke dalam suatu kotak. (Keterangan: 1 lusin $= 12$ donat)

Solusi Soal 1 Latihan 2

Perhatikan bahwa nilai dari x_i yang mungkin adalah $0 \leq x_i \leq r$ dan $x_i \in \mathbb{N}_0$.

Solusi Soal 1 Latihan 2

Perhatikan bahwa nilai dari x_i yang mungkin adalah $0 \leq x_i \leq r$ dan $x_i \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x_i direpresentasikan dengan banyaknya angka 1

Solusi Soal 1 Latihan 2

Perhatikan bahwa nilai dari x_i yang mungkin adalah $0 \leq x_i \leq r$ dan $x_i \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x_i direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$.

Solusi Soal 1 Latihan 2

Perhatikan bahwa nilai dari x_i yang mungkin adalah $0 \leq x_i \leq r$ dan $x_i \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x_i direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Perhatikan bahwa terdapat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$.

Solusi Soal 1 Latihan 2

Perhatikan bahwa nilai dari x_i yang mungkin adalah $0 \leq x_i \leq r$ dan $x_i \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x_i direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Perhatikan bahwa terdapat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$. Dengan aturan perkalian dan aturan pembagian banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$ adalah

Solusi Soal 1 Latihan 2

Perhatikan bahwa nilai dari x_i yang mungkin adalah $0 \leq x_i \leq r$ dan $x_i \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x_i direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Perhatikan bahwa terdapat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$. Dengan aturan perkalian dan aturan pembagian banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$ adalah

$$\frac{(\#\text{ angka }1 + \#\text{ tanda }-)!}{(\#\text{ angka }1)!\,(\#\text{ tanda }-)!} =$$

Solusi Soal 1 Latihan 2

Perhatikan bahwa nilai dari x_i yang mungkin adalah $0 \leq x_i \leq r$ dan $x_i \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x_i direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Perhatikan bahwa terdapat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$. Dengan aturan perkalian dan aturan pembagian banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$ adalah

$$\begin{aligned}\frac{(\#\text{ angka } 1 + \#\text{ tanda } -)!}{(\#\text{ angka } 1)!\,(\#\text{ tanda } -)!} &= \frac{(r+n-1)!}{r! \cdot (n-1)!} \\ &= \end{aligned}$$

Solusi Soal 1 Latihan 2

Perhatikan bahwa nilai dari x_i yang mungkin adalah $0 \leq x_i \leq r$ dan $x_i \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x_i direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Perhatikan bahwa terdapat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$. Dengan aturan perkalian dan aturan pembagian banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{(\#\text{ angka } 1 + \#\text{ tanda } -)!}{(\#\text{ angka } 1)!\,(\#\text{ tanda } -)!} &= \frac{(r+n-1)!}{r!\cdot(n-1)!} \\ &= \binom{r+n-1}{r} = \end{aligned}$$

Solusi Soal 1 Latihan 2

Perhatikan bahwa nilai dari x_i yang mungkin adalah $0 \leq x_i \leq r$ dan $x_i \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x_i direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Perhatikan bahwa terdapat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$. Dengan aturan perkalian dan aturan pembagian banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{(\#\text{ angka } 1 + \#\text{ tanda } -)!}{(\#\text{ angka } 1)!\,(\#\text{ tanda } -)!} &= \frac{(r+n-1)!}{r!\cdot(n-1)!} \\ &= \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Kita dapat menyimpulkan bahwa banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 \cdots + x_n = r$ adalah

Solusi Soal 1 Latihan 2

Perhatikan bahwa nilai dari x_i yang mungkin adalah $0 \leq x_i \leq r$ dan $x_i \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x_i direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Perhatikan bahwa terdapat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$. Dengan aturan perkalian dan aturan pembagian banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{(\#\ \text{angka}\ 1 + \#\ \text{tanda}\ -)!}{(\#\ \text{angka}\ 1)!\,(\#\ \text{tanda}\ -)!} &= \frac{(r+n-1)!}{r! \cdot (n-1)!} \\ &= \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Kita dapat menyimpulkan bahwa banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 \cdots + x_n = r$ adalah

$$\binom{(\text{nilai } r) + (\#\ \text{variabel}) - 1}{(\text{nilai } r)}$$

Solusi Soal 1 Latihan 2

Perhatikan bahwa nilai dari x_i yang mungkin adalah $0 \leq x_i \leq r$ dan $x_i \in \mathbb{N}_0$. Misalkan nilai untuk masing-masing x_i direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap variabel berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan $-$. Perhatikan bahwa terdapat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$. Dengan aturan perkalian dan aturan pembagian banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat r angka 1 dan $(n-1)$ tanda $-$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{(\#\text{ angka } 1 + \#\text{ tanda } -)!}{(\#\text{ angka } 1)!\,(\#\text{ tanda } -)!} &= \frac{(r+n-1)!}{r!\cdot(n-1)!} \\ &= \binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Kita dapat menyimpulkan bahwa banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 \cdots + x_n = r$ adalah

$$\binom{(\text{nilai } r) + (\#\text{ variabel}) - 1}{(\text{nilai } r)} = \binom{(\text{nilai } r) + (\#\text{ variabel}) - 1}{(\#\text{ variabel}) - 1}.$$

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan banyaknya donat pada masing-masing kotak direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap kotak yang berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$.

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan banyaknya donat pada masing-masing kotak direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap kotak yang berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$. Perhatikan bahwa terdapat 12 angka 1 dan 3 tanda $-$.

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan banyaknya donat pada masing-masing kotak direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap kotak yang berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$. Perhatikan bahwa terdapat 12 angka 1 dan 3 tanda $-$. Menurut aturan perkalian dan aturan pembagian, banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat tepat 12 angka 1 dan 3 tanda $-$ adalah

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan banyaknya donat pada masing-masing kotak direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap kotak yang berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$. Perhatikan bahwa terdapat 12 angka 1 dan 3 tanda $-$. Menurut aturan perkalian dan aturan pembagian, banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat tepat 12 angka 1 dan 3 tanda $-$ adalah

$$\frac{(12+3)!}{12!\cdot 3!} = 455$$

Jadi ada 455 cara pendistribusian 1 lusin donat tersebut.

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan banyaknya donat pada masing-masing kotak direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap kotak yang berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$. Perhatikan bahwa terdapat 12 angka 1 dan 3 tanda $-$. Menurut aturan perkalian dan aturan pembagian, banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat tepat 12 angka 1 dan 3 tanda $-$ adalah

$$\frac{(12+3)!}{12! \cdot 3!} = 455$$

Jadi ada 455 cara pendistribusian 1 lusin donat tersebut.

Catatan

Banyaknya cara pendistribusian donat juga dapat dimodelkan sebagai banyaknya solusi dari persamaan

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan banyaknya donat pada masing-masing kotak direpresentasikan dengan banyaknya angka 1 dan untuk setiap kotak yang berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$. Perhatikan bahwa terdapat 12 angka 1 dan 3 tanda $-$. Menurut aturan perkalian dan aturan pembagian, banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat tepat 12 angka 1 dan 3 tanda $-$ adalah

$$\frac{(12+3)!}{12! \cdot 3!} = 455$$

Jadi ada 455 cara pendistribusian 1 lusin donat tersebut.

Catatan

Banyaknya cara pendistribusian donat juga dapat dimodelkan sebagai banyaknya solusi dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12,\ x_i \in \mathbb{N}_0 \text{ untuk setiap } 1 \leq i \leq 4.$$

Karena tidak boleh ada kotak yang kosong, maka setiap kotak memuat setidaknya 1 donat.

Karena tidak boleh ada kotak yang kosong, maka setiap kotak memuat setidaknya 1 donat. Karena terdapat 4 kotak, maka sisa donat yang dapat dibagikan adalah 8 buah (12 donat $-4 \cdot 1$ donat).

Karena tidak boleh ada kotak yang kosong, maka setiap kotak memuat setidaknya 1 donat. Karena terdapat 4 kotak, maka sisa donat yang dapat dibagikan adalah 8 buah (12 donat $-4 \cdot 1$ donat). Misalkan banyaknya donat di satu kotak direpresentasikan dengan banyaknya 1 dan untuk setiap kotak berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$.

Karena tidak boleh ada kotak yang kosong, maka setiap kotak memuat setidaknya 1 donat. Karena terdapat 4 kotak, maka sisa donat yang dapat dibagikan adalah 8 buah (12 donat $-4 \cdot 1$ donat). Misalkan banyaknya donat di satu kotak direpresentasikan dengan banyaknya 1 dan untuk setiap kotak berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$. Perhatikan bahwa terdapat 8 angka 1 dan 3 tanda $-$.

Karena tidak boleh ada kotak yang kosong, maka setiap kotak memuat setidaknya 1 donat. Karena terdapat 4 kotak, maka sisa donat yang dapat dibagikan adalah 8 buah (12 donat $-4 \cdot 1$ donat). Misalkan banyaknya donat di satu kotak direpresentasikan dengan banyaknya 1 dan untuk setiap kotak berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$. Perhatikan bahwa terdapat 8 angka 1 dan 3 tanda $-$. Menurut aturan perkalian dan aturan pembagian, banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat tepat 8 angka 1 dan 3 tanda $-$ adalah

Karena tidak boleh ada kotak yang kosong, maka setiap kotak memuat setidaknya 1 donat. Karena terdapat 4 kotak, maka sisa donat yang dapat dibagikan adalah 8 buah (12 donat $-4 \cdot 1$ donat). Misalkan banyaknya donat di satu kotak direpresentasikan dengan banyaknya 1 dan untuk setiap kotak berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$. Perhatikan bahwa terdapat 8 angka 1 dan 3 tanda $-$. Menurut aturan perkalian dan aturan pembagian, banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat tepat 8 angka 1 dan 3 tanda $-$ adalah

$$\frac{(8+3)!}{8! \cdot 3!} = 165,$$

jadi ada 165 cara pendistribusian 1 lusin donat tersebut.

Karena tidak boleh ada kotak yang kosong, maka setiap kotak memuat setidaknya 1 donat. Karena terdapat 4 kotak, maka sisa donat yang dapat dibagikan adalah 8 buah (12 donat $-4 \cdot 1$ donat). Misalkan banyaknya donat di satu kotak direpresentasikan dengan banyaknya 1 dan untuk setiap kotak berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$. Perhatikan bahwa terdapat 8 angka 1 dan 3 tanda $-$. Menurut aturan perkalian dan aturan pembagian, banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat tepat 8 angka 1 dan 3 tanda $-$ adalah

$$\frac{(8+3)!}{8! \cdot 3!} = 165,$$

jadi ada 165 cara pendistribusian 1 lusin donat tersebut.

Catatan

Banyaknya cara pendistribusian donat ini juga dapat dimodelkan sebagai banyaknya solusi dari persamaan

Karena tidak boleh ada kotak yang kosong, maka setiap kotak memuat setidaknya 1 donat. Karena terdapat 4 kotak, maka sisa donat yang dapat dibagikan adalah 8 buah (12 donat $-4 \cdot 1$ donat). Misalkan banyaknya donat di satu kotak direpresentasikan dengan banyaknya 1 dan untuk setiap kotak berbeda angka 1 tersebut dipisahkan dengan tanda $-$. Perhatikan bahwa terdapat 8 angka 1 dan 3 tanda $-$. Menurut aturan perkalian dan aturan pembagian, banyaknya permutasi berbeda dari string yang memuat tepat 8 angka 1 dan 3 tanda $-$ adalah

$$\frac{(8+3)!}{8! \cdot 3!} = 165,$$

jadi ada 165 cara pendistribusian 1 lusin donat tersebut.

Catatan

Banyaknya cara pendistribusian donat ini juga dapat dimodelkan sebagai banyaknya solusi dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12,\ x_i \geq 1 \text{ untuk setiap } 1 \leq i \leq 4.$$

Rumus Kombinasi-r dengan Pengulangan

Teorema

Nilai dari kombinasi-r dengan pengulangan, yaitu banyaknya cara mengambil r objek dari n **jenis** objek yang membolehkan setiap jenis objek diambil lebih dari sekali adalah

$$\binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1}.$$

Bukti

Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Anda dapat mengingat teorema di atas sebagai berikut: nilai kombinasi-r dengan pengulangan dari n jenis objek berbeda adalah

$$\binom{(\#\text{ yang diambil}) + (\#\text{ jenis}) - 1}{\#\text{ yang diambil}} = \binom{(\#\text{ yang diambil}) + (\#\text{ jenis}) - 1}{(\#\text{ jenis }) - 1}$$

Bahasan

Challenging Problems

Challenging Problems

1. Seorang petani memiliki 5 kambing identik yang akan ditempatkan di 3 kandang berbeda. Jika setiap kandang tidak boleh ada yang kosong, berapa banyak cara penempatan kambing tersebut?
2. Kita mengetahui bahwa banyaknya solusi berbeda dari persamaan $\sum_{i=1}^{n} x_i = r$ dengan syarat $\forall i \, (x_i \in \mathbb{N}_0)$ adalah $\binom{r+n-1}{r}$. Tentukan banyaknya solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan-persamaan berikut
    1. $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ dengan $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, dan $x_3 \geq 3$.
    2. $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ dengan $0 \leq x_1 \leq 2$ dan $x_2 > 1$.

Bahasan

Ringkasan: Rumus Permutasi dan Kombinasi dengan Pengulangan

	Permutasi-r	Kombinasi-r
Dengan pengulangan	n^r	$\binom{r+n-1}{r}$
Tanpa pengulangan	$P(n, r)$	$\binom{n}{r}$

Perumuman Permutasi dan Kombinasi Lainnya

Terdapat beberapa jenis permutasi dan kombinasi lain. Pada dasarnya semua formula perumuman permutasi dan kombinasi tersebut dapat diperoleh hanya dengan memakai **empat** aturan dasar berhitung saja, yaitu

Perumuman Permutasi dan Kombinasi Lainnya

Terdapat beberapa jenis permutasi dan kombinasi lain. Pada dasarnya semua formula perumuman permutasi dan kombinasi tersebut dapat diperoleh hanya dengan memakai **empat** aturan dasar berhitung saja, yaitu **aturan penjumlahan, aturan perkalian, prinsip inklusi-eksklusi (aturan pengurangan), dan aturan pembagian**.

Perumuman Permutasi dan Kombinasi Lainnya

Terdapat beberapa jenis permutasi dan kombinasi lain. Pada dasarnya semua formula perumuman permutasi dan kombinasi tersebut dapat diperoleh hanya dengan memakai **empat** aturan dasar berhitung saja, yaitu **aturan penjumlahan, aturan perkalian, prinsip inklusi-eksklusi (aturan pengurangan), dan aturan pembagian**. Silakan baca sendiri buku teks.