Prinsip Sarang Merpati
(*Pigeonhole Principle*)

Kuliah Matematika Diskret Semester Genap 2022-2023

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

April 2023

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications* , Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Mathematics for Computer Science*. MIT, 2010, oleh E. Lehman, F. T. Leighton, A. R. Meyer.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 2 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
5. Slide kuliah Matematika Diskret 1 di Fasilkom UI oleh A. A. Krisnadhi.
6. *Slide* kuliah Matematika Diskrit di Telkom University oleh B. Purnama.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

Bahasan

Bahasan

Permasalahan Pengambilan Minimum

Perhatikan permasalahan berikut.

Permasalahan Pengambilan Minimum

1. Di sebuah ruangan gelap ada sebuah lemari yang isinya hanya tiga jenis kaus kaki saja, yaitu: kaus kaki merah, putih, dan hitam. Paling sedikit berapa banyak kaus kaki yang harus Anda ambil untuk memastikan bahwa Anda memperoleh sepasang kaus kaki yang warnanya sama? (Anda tidak diperkenankan membawa sumber cahaya apapun).
2. Tentukan banyak minimal orang di suatu ruangan agar setidaknya 3 orang di ruangan itu berulang tahun pada bulan yang sama.
3. PIN ATM sebuah bank terdiri atas 6 digit angka $(0-9)$. Jika bank tersebut memiliki 50 juta nasabah, berapa banyak minimum orang yang harus dikumpulkan untuk memastikan bahwa setidaknya dua nasabah memiliki PIN yang sama?

Prinsip Sarang Merpati (PSM)

Gambar diambil dari `Wikipedia`.

Prinsip Sarang Merpati/ *Pigeonhole Principle*/ *Dirichlet Box Principle* (PSM/ PHP/ DBP)

Jika $(k+1)$ atau lebih objek ("merpati") ditempatkan ke dalam k kotak ("sarang"), maka terdapat **setidaknya satu kotak** yang memuat **dua atau lebih** objek tersebut.

Bukti

Prinsip Sarang Merpati/ *Pigeonhole Principle*/ *Dirichlet Box Principle* (PSM/ PHP/ DBP)

Jika $(k+1)$ atau lebih objek ("merpati") ditempatkan ke dalam k kotak ("sarang"), maka terdapat **setidaknya satu kotak** yang memuat **dua atau lebih** objek tersebut.

Bukti

Andaikan PSM tidak benar, maka setiap kotak paling banyak memuat satu objek.

Prinsip Sarang Merpati/ *Pigeonhole Principle*/ *Dirichlet Box Principle* (PSM/ PHP/ DBP)

Jika $(k+1)$ atau lebih objek ("merpati") ditempatkan ke dalam k kotak ("sarang"), maka terdapat **setidaknya satu kotak** yang memuat **dua atau lebih** objek tersebut.

Bukti

Andaikan PSM tidak benar, maka setiap kotak paling banyak memuat satu objek. Karena hanya ada k kotak, maka secara keseluruhan paling banyak hanya ada

Prinsip Sarang Merpati/ *Pigeonhole Principle*/ *Dirichlet Box Principle* (PSM/ PHP/ DBP)

Jika $(k+1)$ atau lebih objek ("merpati") ditempatkan ke dalam k kotak ("sarang"), maka terdapat **setidaknya satu kotak** yang memuat **dua atau lebih** objek tersebut.

Bukti

Andaikan PSM tidak benar, maka setiap kotak paling banyak memuat satu objek. Karena hanya ada k kotak, maka secara keseluruhan paling banyak hanya ada k objek, bertentangan dengan $k+1$ objek yang diberikan. $\square$

Beberapa Contoh PSM

Teorema (eksistensi fungsi total injektif)

Diberikan dua himpunan berhingga A dan B, jika $|A| > |B|$ maka **tidak mungkin** terdapat fungsi total injektif dari A ke B.

Teorema (eksistensi fungsi total surjektif)

Diberikan dua himpunan berhingga A dan B, jika $|A| < |B|$ maka **tidak mungkin** terdapat fungsi total surjektif dari A ke B.

Contoh

Jika di sebuah kelas ada 40 kursi ("sarang") dan 42 mahasiswa ("merpati") maka pasti ada mahasiswa yang tidak mendapatkan kursi di dalam kelas.

Contoh

Sebuah sekolah akan mengadakan pesta dansa. Jika terdapat m anak perempuan dan n anak laki-laki di sekolah tersebut dengan $m < n$, maka (mungkin)

Contoh

Jika di sebuah kelas ada 40 kursi ("sarang") dan 42 mahasiswa ("merpati") maka pasti ada mahasiswa yang tidak mendapatkan kursi di dalam kelas.

Contoh

Sebuah sekolah akan mengadakan pesta dansa. Jika terdapat m anak perempuan dan n anak laki-laki di sekolah tersebut dengan $m < n$, maka (mungkin)

1. ada anak laki-laki yang tidak datang ke pesta dansa karena tidak memiliki pasangan,

Contoh

Jika di sebuah kelas ada 40 kursi ("sarang") dan 42 mahasiswa ("merpati") maka pasti ada mahasiswa yang tidak mendapatkan kursi di dalam kelas.

Contoh

Sebuah sekolah akan mengadakan pesta dansa. Jika terdapat m anak perempuan dan n anak laki-laki di sekolah tersebut dengan $m < n$, maka (mungkin)

1. ada anak laki-laki yang tidak datang ke pesta dansa karena tidak memiliki pasangan,
2. setiap anak laki-laki datang ke pesta dansa tersebut dan setidaknya seorang anak laki-laki memiliki pasangan dansa yang bukan teman sekolahnya.

Mengenali "Merpati" dan "Sarangnya"

Kaus Kaki di Ruangan Gelap

Lemari di ruangan gelap, tiga jenis kaus kaki, banyak minimal kaus kaki yang harus diambil agar sepasang kaus kaki berwarna sama?

Solusi:

Mengenali "Merpati" dan "Sarangnya"

Kaus Kaki di Ruangan Gelap

Lemari di ruangan gelap, tiga jenis kaus kaki, banyak minimal kaus kaki yang harus diambil agar sepasang kaus kaki berwarna sama?

Solusi: Cukup 4 kaus kaki saja.

Mengenali “Merpati” dan “Sarangnya”

Kaus Kaki di Ruangan Gelap

Lemari di ruangan gelap, tiga jenis kaus kaki, banyak minimal kaus kaki yang harus diambil agar sepasang kaus kaki berwarna sama?

Solusi: Cukup 4 kaus kaki saja. Karena 3 warna kaus kaki yang berbeda, maka berdasarkan PSM setidaknya

Mengenali “Merpati” dan “Sarangnya”

Kaus Kaki di Ruangan Gelap

Lemari di ruangan gelap, tiga jenis kaus kaki, banyak minimal kaus kaki yang harus diambil agar sepasang kaus kaki berwarna sama?

Solusi: Cukup 4 kaus kaki saja. Karena 3 warna kaus kaki yang berbeda, maka berdasarkan PSM setidaknya 2 dari 4 kaus kaki akan berwarna sama.

Mengenali “Merpati” dan “Sarangnya”

Kaus Kaki di Ruangan Gelap

Lemari di ruangan gelap, tiga jenis kaus kaki, banyak minimal kaus kaki yang harus diambil agar sepasang kaus kaki berwarna sama?

Solusi: Cukup 4 kaus kaki saja. Karena 3 warna kaus kaki yang berbeda, maka berdasarkan PSM setidaknya 2 dari 4 kaus kaki akan berwarna sama.

Hal penting yang harus diperhatikan dalam memecahkan masalah dengan PSM adalah mengenai “merpati” dan “sarangnya”. Terkadang kita harus mengkonstruksi sendiri “sarang” yang dibutuhkan.

Bahasan

Latihan 1

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan berikut.

Latihan 1

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan berikut. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Jika sembarang 5 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 5 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.
2. Jika sembarang 4 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 4 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.

Contoh:
Untuk soal nomor 1,

Latihan 1

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan berikut. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Jika sembarang 5 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 5 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.
2. Jika sembarang 4 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 4 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.

Contoh:
Untuk soal nomor 1, misalkan diambil 5 bilangan: $1, 3, 5, 7, 8$.

Latihan 1

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan berikut. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Jika sembarang 5 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 5 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.
2. Jika sembarang 4 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 4 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.

Contoh:
Untuk soal nomor 1, misalkan diambil 5 bilangan: $1, 3, 5, 7, 8$. Kita memiliki

Latihan 1

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan berikut. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Jika sembarang 5 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 5 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.
2. Jika sembarang 4 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 4 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.

Contoh:
Untuk soal nomor 1, misalkan diambil 5 bilangan: $1, 3, 5, 7, 8$. Kita memiliki $1 + 8 = 9$.

Latihan 1

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan berikut. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Jika sembarang 5 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 5 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.
2. Jika sembarang 4 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 4 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.

Contoh:
Untuk soal nomor 1, misalkan diambil 5 bilangan: $1, 3, 5, 7, 8$. Kita memiliki $1 + 8 = 9$. Kemudian, misalkan diambil 5 bilangan: $2, 3, 5, 7, 8$.

Latihan 1

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan berikut. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Jika sembarang 5 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 5 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.
2. Jika sembarang 4 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 4 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.

Contoh:
Untuk soal nomor 1, misalkan diambil 5 bilangan: $1, 3, 5, 7, 8$. Kita memiliki $1 + 8 = 9$. Kemudian, misalkan diambil 5 bilangan: $2, 3, 5, 7, 8$. Kita memiliki

Latihan 1

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan berikut. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Jika sembarang 5 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 5 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.
2. Jika sembarang 4 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 4 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.

Contoh:
Untuk soal nomor 1, misalkan diambil 5 bilangan: $1, 3, 5, 7, 8$. Kita memiliki $1 + 8 = 9$. Kemudian, misalkan diambil 5 bilangan: $2, 3, 5, 7, 8$. Kita memiliki $2 + 7 = 9$.

Latihan 1

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan berikut. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Jika sembarang 5 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 5 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.
2. Jika sembarang 4 bilangan berbeda diambil dari A, maka setidaknya sepasang bilangan dari 4 bilangan itu akan sama dengan 9 bila dijumlahkan.

Contoh:
Untuk soal nomor 1, misalkan diambil 5 bilangan: $1, 3, 5, 7, 8$. Kita memiliki $1 + 8 = 9$. Kemudian, misalkan diambil 5 bilangan: $2, 3, 5, 7, 8$. Kita memiliki $2 + 7 = 9$. Apakah hal ini selalu benar untuk setiap 5 bilangan yang diambil dari A?

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar.

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\}\,,$$

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut

$$\{1,8\}\,,\ \{2,7\}\,,$$

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\}\,,\ \{2,7\}\,,\ \{3,6\}\,,$$

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\}\,,\ \{2,7\}\,,\ \{3,6\}\,,\ \{4,5\}\,.$$

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\}\,,\ \{2,7\}\,,\ \{3,6\}\,,\ \{4,5\}\,.$$
Kelima bilangan yang diambil dimasukkan ke kotak sesuai labelnya.

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut

$$\{1,8\}\,,\ \{2,7\}\,,\ \{3,6\}\,,\ \{4,5\}\,.$$

Kelima bilangan yang diambil dimasukkan ke kotak sesuai labelnya. Ini berarti bilangan n dimasukkan ke dalam kotak berlabel $\{n, 9-n\}$.

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\}\,,\ \{2,7\}\,,\ \{3,6\}\,,\ \{4,5\}\,.$$
Kelima bilangan yang diambil dimasukkan ke kotak sesuai labelnya. Ini berarti bilangan n dimasukkan ke dalam kotak berlabel $\{n, 9-n\}$. Karena kita mengambil 5 bilangan dari A dan hanya terdapat 4 kotak, maka

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\},\ \{2,7\},\ \{3,6\},\ \{4,5\}.$$
Kelima bilangan yang diambil dimasukkan ke kotak sesuai labelnya. Ini berarti bilangan n dimasukkan ke dalam kotak berlabel $\{n, 9-n\}$. Karena kita mengambil 5 bilangan dari A dan hanya terdapat 4 kotak, maka menurut PSM setidaknya ada satu kotak yang diisi oleh 2 bilangan.

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\},\ \{2,7\},\ \{3,6\},\ \{4,5\}.$$
Kelima bilangan yang diambil dimasukkan ke kotak sesuai labelnya. Ini berarti bilangan n dimasukkan ke dalam kotak berlabel $\{n, 9-n\}$. Karena kita mengambil 5 bilangan dari A dan hanya terdapat 4 kotak, maka menurut PSM setidaknya ada satu kotak yang diisi oleh 2 bilangan. Jadi di antara 5 bilangan yang diambil tadi, pasti terdapat salah satu pasangan bilangan berikut:

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\},\ \{2,7\},\ \{3,6\},\ \{4,5\}.$$
Kelima bilangan yang diambil dimasukkan ke kotak sesuai labelnya. Ini berarti bilangan n dimasukkan ke dalam kotak berlabel $\{n, 9-n\}$. Karena kita mengambil 5 bilangan dari A dan hanya terdapat 4 kotak, maka menurut PSM setidaknya ada satu kotak yang diisi oleh 2 bilangan. Jadi di antara 5 bilangan yang diambil tadi, pasti terdapat salah satu pasangan bilangan berikut: 1 dan 8, 2 dan 7, 3 dan 6, atau 4 dan 5.

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\}, \{2,7\}, \{3,6\}, \{4,5\}.$$
Kelima bilangan yang diambil dimasukkan ke kotak sesuai labelnya. Ini berarti bilangan n dimasukkan ke dalam kotak berlabel $\{n, 9-n\}$. Karena kita mengambil 5 bilangan dari A dan hanya terdapat 4 kotak, maka menurut PSM setidaknya ada satu kotak yang diisi oleh 2 bilangan. Jadi di antara 5 bilangan yang diambil tadi, pasti terdapat salah satu pasangan bilangan berikut: 1 dan 8, 2 dan 7, 3 dan 6, atau 4 dan 5. Perhatikan bahwa jumlah dari masing-masing pasangan bilangan tersebut adalah 9.
2. Pernyataan kedua salah.

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\}, \{2,7\}, \{3,6\}, \{4,5\}.$$
Kelima bilangan yang diambil dimasukkan ke kotak sesuai labelnya. Ini berarti bilangan n dimasukkan ke dalam kotak berlabel $\{n, 9-n\}$. Karena kita mengambil 5 bilangan dari A dan hanya terdapat 4 kotak, maka menurut PSM setidaknya ada satu kotak yang diisi oleh 2 bilangan. Jadi di antara 5 bilangan yang diambil tadi, pasti terdapat salah satu pasangan bilangan berikut: 1 dan 8, 2 dan 7, 3 dan 6, atau 4 dan 5. Perhatikan bahwa jumlah dari masing-masing pasangan bilangan tersebut adalah 9.
2. Pernyataan kedua salah. Contohnya adalah ketika 4 bilangan yang diambil dari A adalah

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\},\ \{2,7\},\ \{3,6\},\ \{4,5\}.$$
Kelima bilangan yang diambil dimasukkan ke kotak sesuai labelnya. Ini berarti bilangan n dimasukkan ke dalam kotak berlabel $\{n, 9-n\}$. Karena kita mengambil 5 bilangan dari A dan hanya terdapat 4 kotak, maka menurut PSM setidaknya ada satu kotak yang diisi oleh 2 bilangan. Jadi di antara 5 bilangan yang diambil tadi, pasti terdapat salah satu pasangan bilangan berikut: 1 dan 8, 2 dan 7, 3 dan 6, atau 4 dan 5. Perhatikan bahwa jumlah dari masing-masing pasangan bilangan tersebut adalah 9.
2. Pernyataan kedua salah. Contohnya adalah ketika 4 bilangan yang diambil dari A adalah 1, 2, 3, dan 4.

Solusi Latihan 1

1. Pernyataan pertama benar. Konstruksi 4 kotak yang masing-masing diberi label berikut
$$\{1,8\}, \{2,7\}, \{3,6\}, \{4,5\}.$$
Kelima bilangan yang diambil dimasukkan ke kotak sesuai labelnya. Ini berarti bilangan n dimasukkan ke dalam kotak berlabel $\{n, 9-n\}$. Karena kita mengambil 5 bilangan dari A dan hanya terdapat 4 kotak, maka menurut PSM setidaknya ada satu kotak yang diisi oleh 2 bilangan. Jadi di antara 5 bilangan yang diambil tadi, pasti terdapat salah satu pasangan bilangan berikut: 1 dan 8, 2 dan 7, 3 dan 6, atau 4 dan 5. Perhatikan bahwa jumlah dari masing-masing pasangan bilangan tersebut adalah 9.
2. Pernyataan kedua salah. Contohnya adalah ketika 4 bilangan yang diambil dari A adalah 1, 2, 3, dan 4. Tidak ada sepasang bilangan yang jumlahnya 9.

Bahasan

Perumuman Prinsip Sarang Merpati

Prinsip Sarang Merpati yang Diperumum

Jika N objek ("merpati") ditempatkan ke dalam k kotak ("sarang"), maka **paling sedikit ada satu kotak** yang memuat $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objek.

Bukti PSM yang Diperumum

Untuk membuktikan PSM yang diperumum, kita akan memakai lema berikut

Lema

Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku $\lceil x \rceil < x + 1$. (Atau dengan perkataan lain $\lceil x \rceil - 1 < x$.)

Bukti (Bukti PSM yang diperumum)

Andaikan PSM yang diperumum tidak benar, maka setiap kotak paling banyak

memuat

Bukti PSM yang Diperumum

Untuk membuktikan PSM yang diperumum, kita akan memakai lema berikut

Lema

Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku $\lceil x \rceil < x + 1$. (Atau dengan perkataan lain $\lceil x \rceil - 1 < x$.)

Bukti (Bukti PSM yang diperumum)

Andaikan PSM yang diperumum tidak benar, maka setiap kotak paling banyak memuat $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ objek. Karena terdapat k kotak, maka total objek secara keseluruhan adalah

Bukti PSM yang Diperumum

Untuk membuktikan PSM yang diperumum, kita akan memakai lema berikut

Lema

Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku $\lceil x \rceil < x + 1$. (Atau dengan perkataan lain $\lceil x \rceil - 1 < x$.)

Bukti (Bukti PSM yang diperumum)

Andaikan PSM yang diperumum tidak benar, maka setiap kotak paling banyak memuat $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ objek. Karena terdapat k kotak, maka total objek secara keseluruhan adalah

$$k \cdot \left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 \right) <$$

Bukti PSM yang Diperumum

Untuk membuktikan PSM yang diperumum, kita akan memakai lema berikut

Lema

Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku $\lceil x \rceil < x + 1$. (Atau dengan perkataan lain $\lceil x \rceil - 1 < x$.)

Bukti (Bukti PSM yang diperumum)

Andaikan PSM yang diperumum tidak benar, maka setiap kotak paling banyak memuat $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ objek. Karena terdapat k kotak, maka total objek secara keseluruhan adalah

$$k \cdot \left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 \right) < k \left(\frac{N}{k} \right) = N,$$

Bukti PSM yang Diperumum

Untuk membuktikan PSM yang diperumum, kita akan memakai lema berikut

Lema

Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku $\lceil x \rceil < x + 1$. (Atau dengan perkataan lain $\lceil x \rceil - 1 < x$.)

Bukti (Bukti PSM yang diperumum)

Andaikan PSM yang diperumum tidak benar, maka setiap kotak paling banyak memuat $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ objek. Karena terdapat k kotak, maka total objek secara keseluruhan adalah

$$k \cdot \left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 \right) < k \left(\frac{N}{k} \right) = N,$$

artinya total objek secara keseluruhan kurang dari N. Hal ini bertentangan dengan N objek yang diberikan. □

Beberapa Contoh PSM yang Diperumum

Contoh

1. Jika ada 25 mahasiswa di suatu ruangan, maka 3 orang di antaranya pasti berulang tahun pada bulan yang sama.

Beberapa Contoh PSM yang Diperumum

Contoh

1. Jika ada 25 mahasiswa di suatu ruangan, maka 3 orang di antaranya pasti berulang tahun pada bulan yang sama.

   Dalam 1 tahun ada 12 bulan,

Beberapa Contoh PSM yang Diperumum

Contoh

1. Jika ada 25 mahasiswa di suatu ruangan, maka 3 orang di antaranya pasti berulang tahun pada bulan yang sama.

   Dalam 1 tahun ada 12 bulan, berdasarkan PSM yang diperumum ada $\left\lceil \frac{25}{12} \right\rceil = 3$ orang yang berulang tahun pada bulan yang sama.

2. Di antara 2500 mahasiswa FIF angkatan 2018 setidaknya ada 74 orang yang berasal dari provinsi yang sama.

Beberapa Contoh PSM yang Diperumum

Contoh

1. Jika ada 25 mahasiswa di suatu ruangan, maka 3 orang di antaranya pasti berulang tahun pada bulan yang sama.

   Dalam 1 tahun ada 12 bulan, berdasarkan PSM yang diperumum ada $\left\lceil \frac{25}{12} \right\rceil = 3$ orang yang berulang tahun pada bulan yang sama.

2. Di antara 2500 mahasiswa FIF angkatan 2018 setidaknya ada 74 orang yang berasal dari provinsi yang sama.

   Ada sebanyak 34 provinsi di Indonesia (saat ini, berdasarkan http://id.wikipedia.org/wiki/Daftar_provinsi_di_Indonesia).

Beberapa Contoh PSM yang Diperumum

Contoh

1. Jika ada 25 mahasiswa di suatu ruangan, maka 3 orang di antaranya pasti berulang tahun pada bulan yang sama.

   Dalam 1 tahun ada 12 bulan, berdasarkan PSM yang diperumum ada $\left\lceil \frac{25}{12} \right\rceil = 3$ orang yang berulang tahun pada bulan yang sama.

2. Di antara 2500 mahasiswa FIF angkatan 2018 setidaknya ada 74 orang yang berasal dari provinsi yang sama.

   Ada sebanyak 34 provinsi di Indonesia (saat ini, berdasarkan `http://id.wikipedia.org/wiki/Daftar_provinsi_di_Indonesia`). Berdasarkan PSM yang diperumum ada setidaknya ada $\left\lceil \frac{2500}{34} \right\rceil = 74$ orang yang berasal dari provinsi yang sama.

Contoh Soal PSM yang Diperumum

Contoh Soal

Nilai indeks yang digunakan di Tel-U terdiri atas: $\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, dan $\mathbf{T}$. Paling sedikit berapa banyak mahasiswa yang harus mengikuti suatu kuliah agar setidaknya ada 12 orang yang memiliki nilai indeks yang sama?

Solusi:

Contoh Soal PSM yang Diperumum

Contoh Soal

Nilai indeks yang digunakan di Tel-U terdiri atas: $\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, dan $\mathbf{T}$. Paling sedikit berapa banyak mahasiswa yang harus mengikuti suatu kuliah agar setidaknya ada 12 orang yang memiliki nilai indeks yang sama?

Solusi: Perhatikan bahwa terdapat 8 nilai indeks yang mungkin.

Contoh Soal PSM yang Diperumum

Contoh Soal

Nilai indeks yang digunakan di Tel-U terdiri atas: $\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, dan $\mathbf{T}$. Paling sedikit berapa banyak mahasiswa yang harus mengikuti suatu kuliah agar setidaknya ada 12 orang yang memiliki nilai indeks yang sama?

Solusi: Perhatikan bahwa terdapat 8 nilai indeks yang mungkin. Agar setidaknya 12 orang memiliki nilai indeks yang sama, kita harus mencari nilai N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil =$

Contoh Soal PSM yang Diperumum

Contoh Soal

Nilai indeks yang digunakan di Tel-U terdiri atas: $\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, dan $\mathbf{T}$. Paling sedikit berapa banyak mahasiswa yang harus mengikuti suatu kuliah agar setidaknya ada 12 orang yang memiliki nilai indeks yang sama?

Solusi: Perhatikan bahwa terdapat 8 nilai indeks yang mungkin. Agar setidaknya 12 orang memiliki nilai indeks yang sama, kita harus mencari nilai N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 12$. Nilai N minimal dapat diperoleh sebagai berikut

$$N =$$

Contoh Soal PSM yang Diperumum

Contoh Soal

Nilai indeks yang digunakan di Tel-U terdiri atas: $\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, dan $\mathbf{T}$. Paling sedikit berapa banyak mahasiswa yang harus mengikuti suatu kuliah agar setidaknya ada 12 orang yang memiliki nilai indeks yang sama?

Solusi: Perhatikan bahwa terdapat 8 nilai indeks yang mungkin. Agar setidaknya 12 orang memiliki nilai indeks yang sama, kita harus mencari nilai N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 12$. Nilai N minimal dapat diperoleh sebagai berikut

$$N = (12-1) \cdot \underbrace{8}_{\text{8 jenis nilai}} + 1 = 89.$$

Tinjau bahwa 89 adalah nilai N minimal yang memenuhi $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 12$, karena $\left\lceil \frac{89}{8} \right\rceil = \left\lceil \frac{88}{8} + \frac{1}{8} \right\rceil = \left\lceil 11\frac{1}{8} \right\rceil =$

Contoh Soal PSM yang Diperumum

Contoh Soal

Nilai indeks yang digunakan di Tel-U terdiri atas: $\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, dan $\mathbf{T}$. Paling sedikit berapa banyak mahasiswa yang harus mengikuti suatu kuliah agar setidaknya ada 12 orang yang memiliki nilai indeks yang sama?

Solusi: Perhatikan bahwa terdapat 8 nilai indeks yang mungkin. Agar setidaknya 12 orang memiliki nilai indeks yang sama, kita harus mencari nilai N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 12$. Nilai N minimal dapat diperoleh sebagai berikut

$$N = (12-1) \cdot \underbrace{8}_{\text{8 jenis nilai}} + 1 = 89.$$

Tinjau bahwa 89 adalah nilai N minimal yang memenuhi $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 12$, karena $\left\lceil \frac{89}{8} \right\rceil = \left\lceil \frac{88}{8} + \frac{1}{8} \right\rceil = \left\lceil 11\frac{1}{8} \right\rceil = 12$, dan $\left\lceil \frac{89-1}{8} \right\rceil =$

Contoh Soal PSM yang Diperumum

Contoh Soal

Nilai indeks yang digunakan di Tel-U terdiri atas: $\mathbf{A}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, dan $\mathbf{T}$. Paling sedikit berapa banyak mahasiswa yang harus mengikuti suatu kuliah agar setidaknya ada 12 orang yang memiliki nilai indeks yang sama?

Solusi: Perhatikan bahwa terdapat 8 nilai indeks yang mungkin. Agar setidaknya 12 orang memiliki nilai indeks yang sama, kita harus mencari nilai N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 12$. Nilai N minimal dapat diperoleh sebagai berikut

$$N = (12-1) \cdot \underbrace{8}_{\text{8 jenis nilai}} + 1 = 89.$$

Tinjau bahwa 89 adalah nilai N minimal yang memenuhi $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 12$, karena $\left\lceil \frac{89}{8} \right\rceil = \left\lceil \frac{88}{8} + \frac{1}{8} \right\rceil = \left\lceil 11\frac{1}{8} \right\rceil = 12$, dan $\left\lceil \frac{89-1}{8} \right\rceil = 11$.

Bahasan

Latihan 2

Latihan

1. Golongan darah manusia terdiri atas 4 jenis, yaitu: **A**, **B**, **AB**, dan **O**. Masing-masing golongan darah memiliki dua jenis rhesus, yaitu $+$ atau $-$. Berapa banyak orang yang diperlukan untuk memastikan bahwa di antara mereka setidaknya ada 5 orang dengan <u>golongan darah dan rhesus</u> yang sama.
2. Berapa banyak string biner dengan panjang 4 yang diperlukan untuk memastikan bahwa terdapat 3 string biner yang sama.
3. Indeks prestasi kumulatif (IPK) adalah bilangan desimal tiga digit berbentuk $a.bc$. Nilai dari $a.bc$ tidak kurang dari 0.00 dan tidak lebih dari 4.00. Berapa banyak mahasiswa yang diperlukan agar setidaknya pasti ada 5 orang dengan IPK yang sama.

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada $4 \cdot 2 = 8$ jenis.

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada $4 \cdot 2 = 8$ jenis. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil =$

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada $4 \cdot 2 = 8$ jenis. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N =$

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada $4 \cdot 2 = 8$ jenis. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (5-1) \cdot 8 + 1 = 33$. Kita memiliki $\left\lceil \frac{33}{8} \right\rceil =$

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada $4 \cdot 2 = 8$ jenis. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (5-1) \cdot 8 + 1 = 33$. Kita memiliki $\left\lceil \frac{33}{8} \right\rceil = 5$ dan $\left\lceil \frac{33-1}{8} \right\rceil =$

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada $4 \cdot 2 = 8$ jenis. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (5-1) \cdot 8 + 1 = 33$. Kita memiliki $\left\lceil \frac{33}{8} \right\rceil = 5$ dan $\left\lceil \frac{33-1}{8} \right\rceil = 4$.

Solusi soal 2:
Melalui aturan perkalian, banyaknya string biner berbeda dengan panjang 4 adalah

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada $4 \cdot 2 = 8$ jenis. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (5-1) \cdot 8 + 1 = 33$. Kita memiliki $\left\lceil \frac{33}{8} \right\rceil = 5$ dan $\left\lceil \frac{33-1}{8} \right\rceil = 4$.

Solusi soal 2:
Melalui aturan perkalian, banyaknya string biner berbeda dengan panjang 4 adalah $2^4 = 16$ string. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{16} \right\rceil =$

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada $4 \cdot 2 = 8$ jenis. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (5-1) \cdot 8 + 1 = 33$. Kita memiliki $\left\lceil \frac{33}{8} \right\rceil = 5$ dan $\left\lceil \frac{33-1}{8} \right\rceil = 4$.

Solusi soal 2:
Melalui aturan perkalian, banyaknya string biner berbeda dengan panjang 4 adalah $2^4 = 16$ string. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{16} \right\rceil = 3$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N =$

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada $4 \cdot 2 = 8$ jenis. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (5-1) \cdot 8 + 1 = 33$. Kita memiliki $\left\lceil \frac{33}{8} \right\rceil = 5$ dan $\left\lceil \frac{33-1}{8} \right\rceil = 4$.

Solusi soal 2:
Melalui aturan perkalian, banyaknya string biner berbeda dengan panjang 4 adalah $2^4 = 16$ string. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{16} \right\rceil = 3$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (3-1) \cdot 16 + 1 = 33$. Kita memiliki $\left\lceil \frac{33}{16} \right\rceil =$

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada $4 \cdot 2 = 8$ jenis. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (5-1) \cdot 8 + 1 = 33$. Kita memiliki $\left\lceil \frac{33}{8} \right\rceil = 5$ dan $\left\lceil \frac{33-1}{8} \right\rceil = 4$.

Solusi soal 2:
Melalui aturan perkalian, banyaknya string biner berbeda dengan panjang 4 adalah $2^4 = 16$ string. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{16} \right\rceil = 3$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (3-1) \cdot 16 + 1 = 33$. Kita memiliki $\left\lceil \frac{33}{16} \right\rceil = 3$ dan $\left\lceil \frac{33-1}{16} \right\rceil =$

Solusi Soal 1 dan 2 Latihan 2

Solusi soal 1:
Melalui aturan perkalian, banyaknya tipe golongan darah **dan** rhesus yang berbeda ada $4 \cdot 2 = 8$ jenis. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{8} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (5-1) \cdot 8 + 1 = 33$. Kita memiliki $\left\lceil \frac{33}{8} \right\rceil = 5$ dan $\left\lceil \frac{33-1}{8} \right\rceil = 4$.

Solusi soal 2:
Melalui aturan perkalian, banyaknya string biner berbeda dengan panjang 4 adalah $2^4 = 16$ string. Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{16} \right\rceil = 3$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (3-1) \cdot 16 + 1 = 33$. Kita memiliki $\left\lceil \frac{33}{16} \right\rceil = 3$ dan $\left\lceil \frac{33-1}{16} \right\rceil = 2$.

Solusi Soal 3 Latihan 2

Pertama akan dicari banyaknya kemungkinan IPK jika IPK yang diperoleh adalah x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$.

Solusi Soal 3 Latihan 2

Pertama akan dicari banyaknya kemungkinan IPK jika IPK yang diperoleh adalah x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Karena IPK yang diperoleh pasti berbentuk $a.bc$, maka:

- banyak kemungkinan untuk a ada

Solusi Soal 3 Latihan 2

Pertama akan dicari banyaknya kemungkinan IPK jika IPK yang diperoleh adalah x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Karena IPK yang diperoleh pasti berbentuk $a.bc$, maka:

- banyak kemungkinan untuk a ada 4 $(0,\ 1,\ 2,\ 3)$,
- banyak kemungkinan untuk b dan c masing-masing ada

Solusi Soal 3 Latihan 2

Pertama akan dicari banyaknya kemungkinan IPK jika IPK yang diperoleh adalah x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Karena IPK yang diperoleh pasti berbentuk $a.bc$, maka:

- banyak kemungkinan untuk a ada 4 $(0,\ 1,\ 2,\ 3)$,
- banyak kemungkinan untuk b dan c masing-masing ada 10 (digit bilangan desimal dari $0 - 9$)

Solusi Soal 3 Latihan 2

Pertama akan dicari banyaknya kemungkinan IPK jika IPK yang diperoleh adalah x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Karena IPK yang diperoleh pasti berbentuk $a.bc$, maka:

- banyak kemungkinan untuk a ada 4 $(0,\ 1,\ 2,\ 3)$,
- banyak kemungkinan untuk b dan c masing-masing ada 10 (digit bilangan desimal dari $0 - 9$)

Akibatnya berdasarkan aturan perkalian ada $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ kemungkinan x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$.

Solusi Soal 3 Latihan 2

Pertama akan dicari banyaknya kemungkinan IPK jika IPK yang diperoleh adalah x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Karena IPK yang diperoleh pasti berbentuk $a.bc$, maka:

- banyak kemungkinan untuk a ada 4 $(0,\ 1,\ 2,\ 3)$,
- banyak kemungkinan untuk b dan c masing-masing ada 10 (digit bilangan desimal dari $0 - 9$)

Akibatnya berdasarkan aturan perkalian ada $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ kemungkinan x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Kemudian karena IPK 4.00 juga diperbolehkan, banyak kemungkinan IPK yang berbeda adalah

Solusi Soal 3 Latihan 2

Pertama akan dicari banyaknya kemungkinan IPK jika IPK yang diperoleh adalah x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Karena IPK yang diperoleh pasti berbentuk $a.bc$, maka:

- banyak kemungkinan untuk a ada 4 $(0, 1, 2, 3)$,
- banyak kemungkinan untuk b dan c masing-masing ada 10 (digit bilangan desimal dari $0 - 9$)

Akibatnya berdasarkan aturan perkalian ada $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ kemungkinan x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Kemudian karena IPK 4.00 juga diperbolehkan, banyak kemungkinan IPK yang berbeda adalah 401.
Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{401} \right\rceil =$

Solusi Soal 3 Latihan 2

Pertama akan dicari banyaknya kemungkinan IPK jika IPK yang diperoleh adalah x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Karena IPK yang diperoleh pasti berbentuk $a.bc$, maka:

- banyak kemungkinan untuk a ada 4 $(0, 1, 2, 3)$,
- banyak kemungkinan untuk b dan c masing-masing ada 10 (digit bilangan desimal dari $0 - 9$)

Akibatnya berdasarkan aturan perkalian ada $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ kemungkinan x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Kemudian karena IPK 4.00 juga diperbolehkan, banyak kemungkinan IPK yang berbeda adalah 401.
Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{401} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N =$

Solusi Soal 3 Latihan 2

Pertama akan dicari banyaknya kemungkinan IPK jika IPK yang diperoleh adalah x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Karena IPK yang diperoleh pasti berbentuk $a.bc$, maka:

- banyak kemungkinan untuk a ada 4 $(0, 1, 2, 3)$,
- banyak kemungkinan untuk b dan c masing-masing ada 10 (digit bilangan desimal dari $0 - 9$)

Akibatnya berdasarkan aturan perkalian ada $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ kemungkinan x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Kemudian karena IPK 4.00 juga diperbolehkan, banyak kemungkinan IPK yang berbeda adalah 401.
Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{401} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (5-1) \cdot 401 + 1 = 1605$ karena kita memiliki $\left\lceil \frac{1605}{401} \right\rceil =$

Solusi Soal 3 Latihan 2

Pertama akan dicari banyaknya kemungkinan IPK jika IPK yang diperoleh adalah x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Karena IPK yang diperoleh pasti berbentuk $a.bc$, maka:

- banyak kemungkinan untuk a ada 4 $(0, 1, 2, 3)$,
- banyak kemungkinan untuk b dan c masing-masing ada 10 (digit bilangan desimal dari $0 - 9$)

Akibatnya berdasarkan aturan perkalian ada $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ kemungkinan x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Kemudian karena IPK 4.00 juga diperbolehkan, banyak kemungkinan IPK yang berbeda adalah 401.
Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{401} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (5-1) \cdot 401 + 1 = 1605$ karena kita memiliki $\left\lceil \frac{1605}{401} \right\rceil = 5$ dan $\left\lceil \frac{1605-1}{401} \right\rceil =$

Solusi Soal 3 Latihan 2

Pertama akan dicari banyaknya kemungkinan IPK jika IPK yang diperoleh adalah x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Karena IPK yang diperoleh pasti berbentuk $a.bc$, maka:

- banyak kemungkinan untuk a ada 4 $(0, 1, 2, 3)$,
- banyak kemungkinan untuk b dan c masing-masing ada 10 (digit bilangan desimal dari $0-9$)

Akibatnya berdasarkan aturan perkalian ada $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ kemungkinan x dengan $0.00 \leq x \leq 3.99$. Kemudian karena IPK 4.00 juga diperbolehkan, banyak kemungkinan IPK yang berbeda adalah 401.
Selanjutnya akan dicari N minimal sehingga $\left\lceil \frac{N}{401} \right\rceil = 5$. Tinjau bahwa N minimal adalah $N = (5-1) \cdot 401 + 1 = 1605$ karena kita memiliki $\left\lceil \frac{1605}{401} \right\rceil = 5$ dan $\left\lceil \frac{1605-1}{401} \right\rceil = 4$.

Sebuah Fakta dari PSM yang Diperumum

Permasalahan

Diberikan k buah kotak, tentukan banyaknya objek secara keseluruhan agar setidaknya sebuah kotak pasti memuat m objek.

Sebuah Fakta dari PSM yang Diperumum

Permasalahan

Diberikan k buah kotak, tentukan banyaknya objek secara keseluruhan agar setidaknya sebuah kotak pasti memuat m objek.

Solusi: $k \cdot (m-1) + 1$ objek.

Sebuah Fakta dari PSM yang Diperumum

Permasalahan

Diberikan k buah kotak, tentukan banyaknya objek secara keseluruhan agar setidaknya sebuah kotak pasti memuat m objek.

Solusi: $k \cdot (m-1) + 1$ objek. Nilai $k \cdot (m-1) + 1$ merupakan nilai minimal karena

$$\left\lceil \frac{k \cdot (m-1) + 1}{k} \right\rceil =$$

Sebuah Fakta dari PSM yang Diperumum

Permasalahan

Diberikan k buah kotak, tentukan banyaknya objek secara keseluruhan agar setidaknya sebuah kotak pasti memuat m objek.

Solusi: $k \cdot (m-1)+1$ objek. Nilai $k \cdot (m-1)+1$ merupakan nilai minimal karena

$$\left\lceil \frac{k \cdot (m-1)+1}{k} \right\rceil \quad = \quad \left\lceil (m-1)+\frac{1}{k} \right\rceil =$$

Sebuah Fakta dari PSM yang Diperumum

Permasalahan

Diberikan k buah kotak, tentukan banyaknya objek secara keseluruhan agar setidaknya sebuah kotak pasti memuat m objek.

Solusi: $k \cdot (m-1)+1$ objek. Nilai $k \cdot (m-1)+1$ merupakan nilai minimal karena

$$\left\lceil \frac{k \cdot (m-1)+1}{k} \right\rceil = \left\lceil (m-1)+\frac{1}{k} \right\rceil = m \text{ dan}$$

$$\left\lceil \frac{k \cdot (m-1)+1-1}{k} \right\rceil$$

Sebuah Fakta dari PSM yang Diperumum

Permasalahan

Diberikan k buah kotak, tentukan banyaknya objek secara keseluruhan agar setidaknya sebuah kotak pasti memuat m objek.

Solusi: $k \cdot (m-1)+1$ objek. Nilai $k \cdot (m-1)+1$ merupakan nilai minimal karena

$$\left\lceil \frac{k \cdot (m-1)+1}{k} \right\rceil = \left\lceil (m-1)+\frac{1}{k} \right\rceil = m \text{ dan}$$

$$\left\lceil \frac{k \cdot (m-1)+1-1}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{k \cdot (m-1)}{k} \right\rceil$$

Sebuah Fakta dari PSM yang Diperumum

Permasalahan

Diberikan k buah kotak, tentukan banyaknya objek secara keseluruhan agar setidaknya sebuah kotak pasti memuat m objek.

Solusi: $k \cdot (m-1)+1$ objek. Nilai $k \cdot (m-1)+1$ merupakan nilai minimal karena

$$\left\lceil \frac{k \cdot (m-1)+1}{k} \right\rceil = \left\lceil (m-1)+\frac{1}{k} \right\rceil = m \text{ dan}$$

$$\left\lceil \frac{k \cdot (m-1)+1-1}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{k \cdot (m-1)}{k} \right\rceil = m-1.$$

Bahasan

Challenging Problems

1. PIN ATM sebuah bank terdiri atas 6 digit $(0 - 9)$. Jika bank tersebut memiliki 50 juta nasabah, berapa banyak minimum orang yang harus dikumpulkan agar setidaknya dua nasabah memiliki PIN yang sama?
2. Benar atau salah: di antara 5 bilangan asli sembarang, maka setidaknya ada 2 bilangan yang sisanya sama ketika dibagi 4.
3. Benar atau salah: diberikan bilangan bulat $n \geq 1$. Jika diberikan $n + 1$ bilangan asli, maka setidaknya 2 bilangan memiliki sisa yang sama ketika dibagi n.
4. Benar atau salah: untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$, terdapat kelipatan n (yang lebih besar dari n) dan hanya memuat digit 0 atau 1 saja.

Beberapa contoh untuk fakta pada Soal 4:

- Contoh kelipatan 2 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja:

Challenging Problems

1. PIN ATM sebuah bank terdiri atas 6 digit $(0 - 9)$. Jika bank tersebut memiliki 50 juta nasabah, berapa banyak minimum orang yang harus dikumpulkan agar setidaknya dua nasabah memiliki PIN yang sama?
2. Benar atau salah: di antara 5 bilangan asli sembarang, maka setidaknya ada 2 bilangan yang sisanya sama ketika dibagi 4.
3. Benar atau salah: diberikan bilangan bulat $n \geq 1$. Jika diberikan $n + 1$ bilangan asli, maka setidaknya 2 bilangan memiliki sisa yang sama ketika dibagi n.
4. Benar atau salah: untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$, terdapat kelipatan n (yang lebih besar dari n) dan hanya memuat digit 0 atau 1 saja.

Beberapa contoh untuk fakta pada Soal 4:

- Contoh kelipatan 2 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja: 10
- Contoh kelipatan 3 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja:

Challenging Problems

1. PIN ATM sebuah bank terdiri atas 6 digit $(0-9)$. Jika bank tersebut memiliki 50 juta nasabah, berapa banyak minimum orang yang harus dikumpulkan agar setidaknya dua nasabah memiliki PIN yang sama?
2. Benar atau salah: di antara 5 bilangan asli sembarang, maka setidaknya ada 2 bilangan yang sisanya sama ketika dibagi 4.
3. Benar atau salah: diberikan bilangan bulat $n \geq 1$. Jika diberikan $n+1$ bilangan asli, maka setidaknya 2 bilangan memiliki sisa yang sama ketika dibagi n.
4. Benar atau salah: untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$, terdapat kelipatan n (yang lebih besar dari n) dan hanya memuat digit 0 atau 1 saja.

Beberapa contoh untuk fakta pada Soal 4:

- Contoh kelipatan 2 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja: 10
- Contoh kelipatan 3 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja: 111 $(111 = 3 \cdot 37)$
- Contoh kelipatan 6 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja:

Challenging Problems

1. PIN ATM sebuah bank terdiri atas 6 digit $(0-9)$. Jika bank tersebut memiliki 50 juta nasabah, berapa banyak minimum orang yang harus dikumpulkan agar setidaknya dua nasabah memiliki PIN yang sama?
2. Benar atau salah: di antara 5 bilangan asli sembarang, maka setidaknya ada 2 bilangan yang sisanya sama ketika dibagi 4.
3. Benar atau salah: diberikan bilangan bulat $n \geq 1$. Jika diberikan $n+1$ bilangan asli, maka setidaknya 2 bilangan memiliki sisa yang sama ketika dibagi n.
4. Benar atau salah: untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$, terdapat kelipatan n (yang lebih besar dari n) dan hanya memuat digit 0 atau 1 saja.

Beberapa contoh untuk fakta pada Soal 4:

- Contoh kelipatan 2 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja: 10
- Contoh kelipatan 3 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja: 111 $(111 = 3 \cdot 37)$
- Contoh kelipatan 6 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja: 1110 $(6 \cdot 185 = 1110)$
- Contoh kelipatan 7 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja:

Challenging Problems

1. PIN ATM sebuah bank terdiri atas 6 digit $(0-9)$. Jika bank tersebut memiliki 50 juta nasabah, berapa banyak minimum orang yang harus dikumpulkan agar setidaknya dua nasabah memiliki PIN yang sama?
2. Benar atau salah: di antara 5 bilangan asli sembarang, maka setidaknya ada 2 bilangan yang sisanya sama ketika dibagi 4.
3. Benar atau salah: diberikan bilangan bulat $n \geq 1$. Jika diberikan $n+1$ bilangan asli, maka setidaknya 2 bilangan memiliki sisa yang sama ketika dibagi n.
4. Benar atau salah: untuk setiap bilangan bulat $n \geq 1$, terdapat kelipatan n (yang lebih besar dari n) dan hanya memuat digit 0 atau 1 saja.

Beberapa contoh untuk fakta pada Soal 4:

- Contoh kelipatan 2 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja: 10
- Contoh kelipatan 3 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja: 111 $(111 = 3 \cdot 37)$
- Contoh kelipatan 6 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja: 1110 $(6 \cdot 185 = 1110)$
- Contoh kelipatan 7 yang hanya memuat digit 0 atau 1 saja: 1001 $(7 \cdot 143 = 1001)$