Aturan Dasar Berhitung (Pencacahan) (*Basic Counting Techniques*)

Kuliah Matematika Diskret Semester Genap 2022-2023

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

Maret 2023

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications* , Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Mathematics for Computer Science*. MIT, 2010, oleh E. Lehman, F. T. Leighton, A. R. Meyer.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 2 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
5. Slide kuliah Matematika Diskret 1 di Fasilkom UI oleh A. A. Krisnadhi.
6. *Slide* kuliah Matematika Diskrit di Telkom University oleh B. Purnama.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

Bahasan

Bahasan

Motivasi: Apa yang Dihitung?

Perhatikan permasalahan berikut.

Permasalahan "Menghitung"

1. *Password* yang diperlukan pada sebuah forum *online* harus memuat 6, 7, atau 8 karakter. Setiap karakter adalah digit bilangan desimal atau huruf kapital dalam alfabet A-Z. Setiap *password* harus memuat setidaknya satu bilangan desimal.

Motivasi: Apa yang Dihitung?

Perhatikan permasalahan berikut.

Permasalahan "Menghitung"

1. *Password* yang diperlukan pada sebuah forum *online* harus memuat 6, 7, atau 8 karakter. Setiap karakter adalah digit bilangan desimal atau huruf kapital dalam alfabet A-Z. Setiap *password* harus memuat setidaknya satu bilangan desimal. Ada berapa banyak *password* yang berbeda?
2. Tim nasional sepak bola Indonesia terdiri atas 23 pemain. Tiga diantaranya penjaga gawang.

Motivasi: Apa yang Dihitung?

Perhatikan permasalahan berikut.

Permasalahan "Menghitung"

1. *Password* yang diperlukan pada sebuah forum *online* harus memuat 6, 7, atau 8 karakter. Setiap karakter adalah digit bilangan desimal atau huruf kapital dalam alfabet A-Z. Setiap *password* harus memuat setidaknya satu bilangan desimal. Ada berapa banyak *password* yang berbeda?
2. Tim nasional sepak bola Indonesia terdiri atas 23 pemain. Tiga diantaranya penjaga gawang. Ada berapa banyak *starting lineup* berbeda yang dapat dibentuk jika tepat seorang penjaga gawang harus bermain?
3. PIN ATM sebuah bank terdiri atas 6 digit $(0 - 9)$. Jika bank tersebut memiliki 50 juta nasabah, berapa

Motivasi: Apa yang Dihitung?

Perhatikan permasalahan berikut.

Permasalahan "Menghitung"

1. *Password* yang diperlukan pada sebuah forum *online* harus memuat 6, 7, atau 8 karakter. Setiap karakter adalah digit bilangan desimal atau huruf kapital dalam alfabet A-Z. Setiap *password* harus memuat setidaknya satu bilangan desimal. Ada berapa banyak *password* yang berbeda?
2. Tim nasional sepak bola Indonesia terdiri atas 23 pemain. Tiga diantaranya penjaga gawang. Ada berapa banyak *starting lineup* berbeda yang dapat dibentuk jika tepat seorang penjaga gawang harus bermain?
3. PIN ATM sebuah bank terdiri atas 6 digit $(0-9)$. Jika bank tersebut memiliki 50 juta nasabah, berapa banyak minimum orang yang harus dikumpulkan untuk memastikan bahwa setidaknya dua nasabah memiliki PIN yang sama?

Kombinatorika: ilmu tentang pengaturan objek, bagian penting dari Matematika Diskrit.

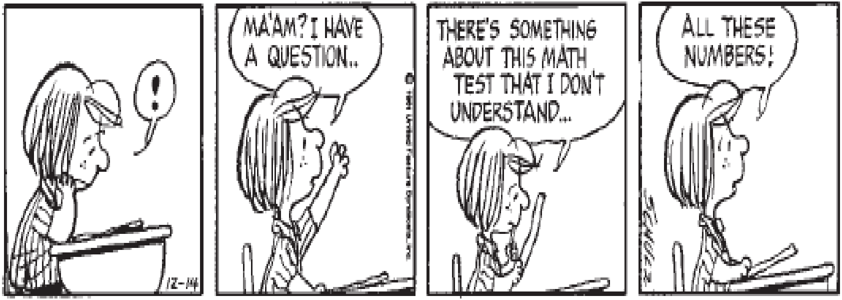
Enumerasi: penghitungan (pencacahan) objek dengan sifat-sifat tertentu, bagian penting dari kombinatorika.

Berhitung (*Counting*)

Berhitung (mencacah) itu . . . tidak semudah kedengarannya.

Berhitung (*Counting*)

Berhitung (mencacah) itu . . . tidak semudah kedengarannya.



Reprinted by permission of UFS, Inc.

Counting is not as easy as it sounds, but when one knows exactly what to count, the counting itself is as easy as $1 - 2 - 3$.

Bahasa Indonesia: "Jumlah" dan "Banyak(nya)"

Dalam bahasa Indonesia sehari-hari, kata "jumlah" sering dipakai sebagai sinonim dari kata "banyak(nya)".

Contoh

1. Jumlah mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.
2. Banyaknya mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.

Secara matematika, penggunaan kata jumlah pada kalimat pertama tidak tepat, karena mahasiswa tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

Bahasa Indonesia: “Jumlah” dan “Banyak(nya)”

Dalam bahasa Indonesia sehari-hari, kata “jumlah” sering dipakai sebagai sinonim dari kata “banyak(nya)”.

Contoh

1. Jumlah mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.
2. Banyaknya mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.

Secara matematika, penggunaan kata jumlah pada kalimat pertama tidak tepat, karena mahasiswa tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

1. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5.

Bahasa Indonesia: "Jumlah" dan "Banyak(nya)"

Dalam bahasa Indonesia sehari-hari, kata "jumlah" sering dipakai sebagai sinonim dari kata "banyak(nya)".

Contoh

1. Jumlah mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.
2. Banyaknya mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.

Secara matematika, penggunaan kata jumlah pada kalimat pertama tidak tepat, karena mahasiswa tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

1. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (salah)

Bahasa Indonesia: "Jumlah" dan "Banyak(nya)"

Dalam bahasa Indonesia sehari-hari, kata "jumlah" sering dipakai sebagai sinonim dari kata "banyak(nya)".

Contoh

1. Jumlah mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.
2. Banyaknya mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.

Secara matematika, penggunaan kata jumlah pada kalimat pertama tidak tepat, karena mahasiswa tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

1. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (salah)
2. Banyaknya bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5.

Bahasa Indonesia: "Jumlah" dan "Banyak(nya)"

Dalam bahasa Indonesia sehari-hari, kata "jumlah" sering dipakai sebagai sinonim dari kata "banyak(nya)".

Contoh

1. Jumlah mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.
2. Banyaknya mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.

Secara matematika, penggunaan kata jumlah pada kalimat pertama tidak tepat, karena mahasiswa tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

1. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (salah)
2. Banyaknya bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (benar)

Bahasa Indonesia: "Jumlah" dan "Banyak(nya)"

Dalam bahasa Indonesia sehari-hari, kata "jumlah" sering dipakai sebagai sinonim dari kata "banyak(nya)".

Contoh

1. Jumlah mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.
2. Banyaknya mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.

Secara matematika, penggunaan kata jumlah pada kalimat pertama tidak tepat, karena mahasiswa tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

1. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (salah)
2. Banyaknya bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (benar)
3. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 adalah 25.

Bahasa Indonesia: “Jumlah” dan “Banyak(nya)”

Dalam bahasa Indonesia sehari-hari, kata “jumlah” sering dipakai sebagai sinonim dari kata “banyak(nya)”.

Contoh

1. Jumlah mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.
2. Banyaknya mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.

Secara matematika, penggunaan kata jumlah pada kalimat pertama tidak tepat, karena mahasiswa tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

1. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (salah)
2. Banyaknya bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (benar)
3. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 adalah 25. (benar)

Bahasa Indonesia: “Jumlah” dan “Banyak(nya)”

Dalam bahasa Indonesia sehari-hari, kata “jumlah” sering dipakai sebagai sinonim dari kata “banyak(nya)”.

Contoh

1. Jumlah mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.
2. Banyaknya mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.

Secara matematika, penggunaan kata jumlah pada kalimat pertama tidak tepat, karena mahasiswa tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

1. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (salah)
2. Banyaknya bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (benar)
3. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 adalah 25. (benar)
4. Jumlah *password* berupa angka 8 digit yang *valid* ada 250.

Bahasa Indonesia: “Jumlah” dan “Banyak(nya)”

Dalam bahasa Indonesia sehari-hari, kata “jumlah” sering dipakai sebagai sinonim dari kata “banyak(nya)”.

Contoh

1. Jumlah mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.
2. Banyaknya mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.

Secara matematika, penggunaan kata jumlah pada kalimat pertama tidak tepat, karena mahasiswa tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

1. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (salah)
2. Banyaknya bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (benar)
3. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 adalah 25. (benar)
4. Jumlah *password* berupa angka 8 digit yang *valid* ada 250. (salah)

Bahasa Indonesia: "Jumlah" dan "Banyak(nya)"

Dalam bahasa Indonesia sehari-hari, kata "jumlah" sering dipakai sebagai sinonim dari kata "banyak(nya)".

Contoh

1. Jumlah mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.
2. Banyaknya mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.

Secara matematika, penggunaan kata jumlah pada kalimat pertama tidak tepat, karena mahasiswa tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

1. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (salah)
2. Banyaknya bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (benar)
3. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 adalah 25. (benar)
4. Jumlah *password* berupa angka 8 digit yang *valid* ada 250. (salah)
5. Banyaknya *password* berupa angka 8 digit yang *valid* ada 250.

Bahasa Indonesia: "Jumlah" dan "Banyak(nya)"

Dalam bahasa Indonesia sehari-hari, kata "jumlah" sering dipakai sebagai sinonim dari kata "banyak(nya)".

Contoh

1. Jumlah mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.
2. Banyaknya mahasiswa di kelas ini tidak lebih dari 60 orang.

Secara matematika, penggunaan kata jumlah pada kalimat pertama tidak tepat, karena mahasiswa tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

1. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (salah)
2. Banyaknya bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 ada 5. (benar)
3. Jumlah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 adalah 25. (benar)
4. Jumlah *password* berupa angka 8 digit yang *valid* ada 250. (salah)
5. Banyaknya *password* berupa angka 8 digit yang *valid* ada 250. (benar)

Padanan bahasa Inggris: "jumlah" $\Rightarrow$ "*the sum of*", "banyaknya" $\Rightarrow$ "*the number of*".

Bahasan

Aturan Penjumlahan

Aturan Jumlah (*Sum Rule/ Addition Rule*)

Misalkan terdapat dua pekerjaan yang harus dilakukan, yaitu T_1 dan T_2. Pekerjaan T_1 dapat diselesaikan dengan n_1 cara, pekerjaan T_2 dapat diselesaikan dengan n_2 cara, serta kedua pekerjaan ini tidak dapat dilakukan bersamaan, maka terdapat

$$n_1 + n_2$$

cara untuk melakukan pekerjaan tersebut.
Kemudian misalkan terdapat m pekerjaan yang harus dilakukan, yaitu $T_1, T_2, \ldots, T_m$. Pekerjaan T_i dapat diselesaikan dengan n_i cara dan tidak ada dua pekerjaan berbeda yang dapat dilakukan bersamaan, maka terdapat

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

cara untuk melakukan pekerjaan tersebut.

Representasi Himpunan Aturan Penjumlahan

Aturan Jumlah (*Sum Rule/ Addition Rule*)

Diberikan himpunan-himpunan berhingga $A_1, A_2, \ldots, A_m$ yang saling lepas (ini berarti $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk **setiap** $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ dengan $i \neq j$), maka banyaknya cara untuk memilih **satu** anggota dari $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ adalah jumlah dari banyaknya anggota setiap himpunan.

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m| \\
\left| \bigcup_{i=1}^{m} A_i \right| &= \sum_{i=1}^{m} |A_i| .
\end{aligned}
$$

Contoh Soal: Aturan Penjumlahan

Contoh soal: aturan penjumlahan

1. Di sebuah kelas terdapat 25 mahasiswa dan 15 mahasiswi. Tentukan banyaknya cara memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Sebuah perusahaan yang menjual laptop ingin memberikan sebuah laptop kepada seorang mahasiswa di suatu kelas. Jika di kelas tersebut ada 20 mahasiswa FTE, 30 mahasiswa FIF, dan 10 mahasiswa FRI, ada berapa banyak cara pembagian laptop yang berbeda?
3. Sebuah restoran menjual makanan dengan variasi menu sebagai berikut: 10 jenis makanan Indonesia, 10 jenis makanan Timur Tengah, 5 jenis makanan Oriental, dan 3 jenis makanan Eropa. Anda memperoleh *voucher* makan gratis yang dapat digunakan untuk sekali makan siang. Ada berapa menu berbeda yang dapat Anda pilih?

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 =$

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Tinjau bahwa: cara membagikan laptop ke mahasiswa FTE ada

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Tinjau bahwa: cara membagikan laptop ke mahasiswa FTE ada 20 cara, cara membagikan laptop ke mahasiswa FIF ada

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Tinjau bahwa: cara membagikan laptop ke mahasiswa FTE ada 20 cara, cara membagikan laptop ke mahasiswa FIF ada 30 cara, dan cara membagikan laptop ke mahasiswa FRI ada

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Tinjau bahwa: cara membagikan laptop ke mahasiswa FTE ada 20 cara, cara membagikan laptop ke mahasiswa FIF ada 30 cara, dan cara membagikan laptop ke mahasiswa FRI ada 10 cara. Karena tidak ada mahasiswa yang berada di dua fakultas berbeda, maka ada

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Tinjau bahwa: cara membagikan laptop ke mahasiswa FTE ada 20 cara, cara membagikan laptop ke mahasiswa FIF ada 30 cara, dan cara membagikan laptop ke mahasiswa FRI ada 10 cara. Karena tidak ada mahasiswa yang berada di dua fakultas berbeda, maka ada $20 + 30 + 10 = 60$ cara pembagian laptop.

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Tinjau bahwa: cara membagikan laptop ke mahasiswa FTE ada 20 cara, cara membagikan laptop ke mahasiswa FIF ada 30 cara, dan cara membagikan laptop ke mahasiswa FRI ada 10 cara. Karena tidak ada mahasiswa yang berada di dua fakultas berbeda, maka ada $20 + 30 + 10 = 60$ cara pembagian laptop.
3. Tinjau bahwa: cara memilih menu makanan Indonesia

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Tinjau bahwa: cara membagikan laptop ke mahasiswa FTE ada 20 cara, cara membagikan laptop ke mahasiswa FIF ada 30 cara, dan cara membagikan laptop ke mahasiswa FRI ada 10 cara. Karena tidak ada mahasiswa yang berada di dua fakultas berbeda, maka ada $20 + 30 + 10 = 60$ cara pembagian laptop.
3. Tinjau bahwa: cara memilih menu makanan Indonesia 10 cara, cara memilih menu makanan Timur Tengah ada

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Tinjau bahwa: cara membagikan laptop ke mahasiswa FTE ada 20 cara, cara membagikan laptop ke mahasiswa FIF ada 30 cara, dan cara membagikan laptop ke mahasiswa FRI ada 10 cara. Karena tidak ada mahasiswa yang berada di dua fakultas berbeda, maka ada $20 + 30 + 10 = 60$ cara pembagian laptop.
3. Tinjau bahwa: cara memilih menu makanan Indonesia 10 cara, cara memilih menu makanan Timur Tengah ada 10 cara, cara memilih menu makanan Oriental ada

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Tinjau bahwa: cara membagikan laptop ke mahasiswa FTE ada 20 cara, cara membagikan laptop ke mahasiswa FIF ada 30 cara, dan cara membagikan laptop ke mahasiswa FRI ada 10 cara. Karena tidak ada mahasiswa yang berada di dua fakultas berbeda, maka ada $20 + 30 + 10 = 60$ cara pembagian laptop.
3. Tinjau bahwa: cara memilih menu makanan Indonesia 10 cara, cara memilih menu makanan Timur Tengah ada 10 cara, cara memilih menu makanan Oriental ada 5 cara, dan cara memilih menu makanan Eropa ada

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Tinjau bahwa: cara membagikan laptop ke mahasiswa FTE ada 20 cara, cara membagikan laptop ke mahasiswa FIF ada 30 cara, dan cara membagikan laptop ke mahasiswa FRI ada 10 cara. Karena tidak ada mahasiswa yang berada di dua fakultas berbeda, maka ada $20 + 30 + 10 = 60$ cara pembagian laptop.
3. Tinjau bahwa: cara memilih menu makanan Indonesia 10 cara, cara memilih menu makanan Timur Tengah ada 10 cara, cara memilih menu makanan Oriental ada 5 cara, dan cara memilih menu makanan Eropa ada 3 cara. Karena tidak ada makanan yang berada dalam dua daftar menu berbeda, maka ada

Solusi Contoh Soal Aturan Penjumlahan

Solusi:

1. Di kelas tersebut terdapat $25 + 15 = 40$ peserta kuliah, akibatnya terdapat 40 cara berbeda untuk memilih seorang ketua kelas di kelas tersebut.
2. Tinjau bahwa: cara membagikan laptop ke mahasiswa FTE ada 20 cara, cara membagikan laptop ke mahasiswa FIF ada 30 cara, dan cara membagikan laptop ke mahasiswa FRI ada 10 cara. Karena tidak ada mahasiswa yang berada di dua fakultas berbeda, maka ada $20 + 30 + 10 = 60$ cara pembagian laptop.
3. Tinjau bahwa: cara memilih menu makanan Indonesia 10 cara, cara memilih menu makanan Timur Tengah ada 10 cara, cara memilih menu makanan Oriental ada 5 cara, dan cara memilih menu makanan Eropa ada 3 cara. Karena tidak ada makanan yang berada dalam dua daftar menu berbeda, maka ada $10 + 10 + 5 + 3 = 28$ cara memilih menu makan siang.

Bahasan

Aturan Perkalian

Aturan Kali (*Product Rule/ Multiplication Rule*)

Misalkan suatu prosedur dapat dibagi menjadi dua pekerjaan yang berurutan, yaitu T_1 dan T_2. Jika terdapat n_1 cara untuk melakukan T_1 dan n_2 cara untuk melakukan T_2, maka terdapat

$$n_1 \cdot n_2$$

cara untuk melakukan prosedur tersebut.
Kemudian misalkan suatu prosedur dapat dibagi menjadi barisan pekerjaan-pekerjaan $T_1, T_2, \ldots, T_m$ yang masing-masing dapat dilakukan dalam $n_1, n_2, \ldots, n_m$ cara secara berurutan, maka terdapat

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_m = \prod_{i=1}^{m} n_i$$

cara untuk melakukan prosedur tersebut.

Representasi Himpunan Aturan Perkalian

Aturan Kali (*Product Rule/ Multiplication Rule*)

Diberikan himpunan-himpunan berhingga $A_1, A_2, \ldots, A_m$, maka banyaknya cara memilih **satu** anggota dari produk kartesius $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ diperoleh dengan memilih satu anggota dari A_1, satu anggota dari A_2, ..., **dan** satu anggota dari A_m.

$$\begin{aligned} |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| &= |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_m| \\ &= \prod_{i=1}^{m} |A_i| . \end{aligned}$$

Contoh Soal: Aturan Perkalian

Contoh soal: aturan perkalian

1. Di sebuah kelas terdapat 25 mahasiswa dan 15 mahasiswi. Tentukan banyaknya cara memilih seorang ketua laki-laki dan wakilnya yang seorang perempuan.
2. Sebuah kafetaria menawarkan menu sarapan, makan siang, dan makan malam sebagai berikut:
    1. menu sarapan: bubur ayam, nasi goreng, roti bakar
    2. menu makan siang: burger, nasi goreng, nasi kari, spaghetti
    3. menu makan malam: ikan bakar, nasi goreng, pizza, spaghetti.

    Berapa banyak kombinasi menu sarapan, makan siang, dan makan malam yang ada?
3. Plat nomor kendaraan di sebuah negara dimulai dengan sebuah huruf kapital (dari A-Z), diikuti 3 digit bilangan desimal (0-9), dan diakhiri dengan dua huruf kapital (dari A-Z). Berapa banyak kombinasi plat nomor kendaraan yang berbeda di negara tersebut?

Solusi Contoh Soal Aturan Perkalian

Solusi:

1. Misalkan $L = \{x : x \text{ mahasiswa di kelas}\}$ dan $P = \{x : x \text{ mahasiswi di kelas}\}$.

Solusi Contoh Soal Aturan Perkalian

Solusi:

1. Misalkan $L = \{x : x \text{ mahasiswa di kelas}\}$ dan $P = \{x : x \text{ mahasiswi di kelas}\}$. Seorang ketua laki-laki dan seorang wakilnya yang perempuan adalah sebuah anggota dari $L \times P$. Banyakya kemungkinan adalah $|L \times P| =$

Solusi Contoh Soal Aturan Perkalian

Solusi:

1. Misalkan $L = \{x : x \text{ mahasiswa di kelas}\}$ dan $P = \{x : x \text{ mahasiswi di kelas}\}$. Seorang ketua laki-laki dan seorang wakilnya yang perempuan adalah sebuah anggota dari $L \times P$. Banyakya kemungkinan adalah $|L \times P| = |L| \cdot |P| = 25 \cdot 15 = 375$ pasang ketua dan wakilnya.

Solusi Contoh Soal Aturan Perkalian

Solusi:

1. Misalkan $L = \{x : x \text{ mahasiswa di kelas}\}$ dan $P = \{x : x \text{ mahasiswi di kelas}\}$. Seorang ketua laki-laki dan seorang wakilnya yang perempuan adalah sebuah anggota dari $L \times P$. Banyakya kemungkinan adalah $|L \times P| = |L| \cdot |P| = 25 \cdot 15 = 375$ pasang ketua dan wakilnya.
2. Misalkan $B = \{\text{bubur ayam, nasi goreng, roti bakar}\}$,

Solusi Contoh Soal Aturan Perkalian

Solusi:

1. Misalkan $L = \{x : x \text{ mahasiswa di kelas}\}$ dan $P = \{x : x \text{ mahasiswi di kelas}\}$. Seorang ketua laki-laki dan seorang wakilnya yang perempuan adalah sebuah anggota dari $L \times P$. Banyakya kemungkinan adalah $|L \times P| = |L| \cdot |P| = 25 \cdot 15 = 375$ pasang ketua dan wakilnya.
2. Misalkan $B = \{\text{bubur ayam, nasi goreng, roti bakar}\}$, $L = \{\text{burger, nasi goreng, nasi kari, spaghetti}\}$,

Solusi Contoh Soal Aturan Perkalian

Solusi:

1. Misalkan $L = \{x : x \text{ mahasiswa di kelas}\}$ dan $P = \{x : x \text{ mahasiswi di kelas}\}$. Seorang ketua laki-laki dan seorang wakilnya yang perempuan adalah sebuah anggota dari $L \times P$. Banyakya kemungkinan adalah $|L \times P| = |L| \cdot |P| = 25 \cdot 15 = 375$ pasang ketua dan wakilnya.
2. Misalkan $B = \{\text{bubur ayam, nasi goreng, roti bakar}\}$,
   $L = \{\text{burger, nasi goreng, nasi kari, spaghetti}\}$,
   $D = \{\text{ikan bakar, nasi goreng, pizza, spaghetti}\}$.

Solusi Contoh Soal Aturan Perkalian

Solusi:

1. Misalkan $L = \{x : x \text{ mahasiswa di kelas}\}$ dan $P = \{x : x \text{ mahasiswi di kelas}\}$. Seorang ketua laki-laki dan seorang wakilnya yang perempuan adalah sebuah anggota dari $L \times P$. Banyakya kemungkinan adalah $|L \times P| = |L| \cdot |P| = 25 \cdot 15 = 375$ pasang ketua dan wakilnya.
2. Misalkan $B = \{\text{bubur ayam, nasi goreng, roti bakar}\}$, $L = \{\text{burger, nasi goreng, nasi kari, spaghetti}\}$, $D = \{\text{ikan bakar, nasi goreng, pizza, spaghetti}\}$. Produk kartesius $B \times L \times D$ menyatakan kombinasi menu sarapan, makan siang, dan makan malam yang mungkin. Sebagai contoh, beberapa kombinasi menu sarapan, makan siang, dan makan malam yang mungkin adalah

Solusi Contoh Soal Aturan Perkalian

Solusi:

1. Misalkan $L = \{x : x \text{ mahasiswa di kelas}\}$ dan $P = \{x : x \text{ mahasiswi di kelas}\}$. Seorang ketua laki-laki dan seorang wakilnya yang perempuan adalah sebuah anggota dari $L \times P$. Banyakya kemungkinan adalah $|L \times P| = |L| \cdot |P| = 25 \cdot 15 = 375$ pasang ketua dan wakilnya.
2. Misalkan $B = \{\text{bubur ayam, nasi goreng, roti bakar}\}$, $L = \{\text{burger, nasi goreng, nasi kari, spaghetti}\}$, $D = \{\text{ikan bakar, nasi goreng, pizza, spaghetti}\}$. Produk kartesius $B \times L \times D$ menyatakan kombinasi menu sarapan, makan siang, dan makan malam yang mungkin. Sebagai contoh, beberapa kombinasi menu sarapan, makan siang, dan makan malam yang mungkin adalah (bubur ayam, burger, ikan bakar), (nasi goreng, nasi goreng, nasi goreng), dan (roti bakar, nasi kari, pizza).

Solusi Contoh Soal Aturan Perkalian

Solusi:

1. Misalkan $L = \{x : x$ mahasiswa di kelas$\}$ dan $P = \{x : x$ mahasiswi di kelas$\}$. Seorang ketua laki-laki dan seorang wakilnya yang perempuan adalah sebuah anggota dari $L \times P$. Banyakya kemungkinan adalah $|L \times P| = |L| \cdot |P| = 25 \cdot 15 = 375$ pasang ketua dan wakilnya.
2. Misalkan $B = \{$bubur ayam, nasi goreng, roti bakar$\}$, $L = \{$burger, nasi goreng, nasi kari, spaghetti$\}$, $D = \{$ikan bakar, nasi goreng, pizza, spaghetti$\}$. Produk kartesius $B \times L \times D$ menyatakan kombinasi menu sarapan, makan siang, dan makan malam yang mungkin. Sebagai contoh, beberapa kombinasi menu sarapan, makan siang, dan makan malam yang mungkin adalah (bubur ayam, burger, ikan bakar), (nasi goreng, nasi goreng, nasi goreng), dan (roti bakar, nasi kari, pizza). Berdasarkan aturan perkalian, banyak kombinasi menu sarapan, makan siang, dan makan malam yang mungkin adalah

Solusi Contoh Soal Aturan Perkalian

Solusi:

1. Misalkan $L = \{x : x \text{ mahasiswa di kelas}\}$ dan $P = \{x : x \text{ mahasiswi di kelas}\}$. Seorang ketua laki-laki dan seorang wakilnya yang perempuan adalah sebuah anggota dari $L \times P$. Banyakya kemungkinan adalah $|L \times P| = |L| \cdot |P| = 25 \cdot 15 = 375$ pasang ketua dan wakilnya.
2. Misalkan $B = \{\text{bubur ayam, nasi goreng, roti bakar}\}$, $L = \{\text{burger, nasi goreng, nasi kari, spaghetti}\}$, $D = \{\text{ikan bakar, nasi goreng, pizza, spaghetti}\}$. Produk kartesius $B \times L \times D$ menyatakan kombinasi menu sarapan, makan siang, dan makan malam yang mungkin. Sebagai contoh, beberapa kombinasi menu sarapan, makan siang, dan makan malam yang mungkin adalah (bubur ayam, burger, ikan bakar), (nasi goreng, nasi goreng, nasi goreng), dan (roti bakar, nasi kari, pizza). Berdasarkan aturan perkalian, banyak kombinasi menu sarapan, makan siang, dan makan malam yang mungkin adalah $|B \times L \times D| = |B| \cdot |L| \cdot |D| = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ kombinasi.

3. Perhatikan bahwa plat nomor di negara tersebut berbentuk

3. Perhatikan bahwa plat nomor di negara tersebut berbentuk $\boxed{p_1}\boxed{p_2}\boxed{p_3}\boxed{p_4}\boxed{p_5}\boxed{p_6}$, dengan
    1. p_1 adalah huruf kapital (dari A-Z), akibatnya ada

3. Perhatikan bahwa plat nomor di negara tersebut berbentuk

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

, dengan

   1. p_1 adalah huruf kapital (dari A-Z), akibatnya ada 26 cara untuk mengisi p_1
   2. p_2, p_3, p_4 adalah digit bilangan desimal, akibatnya ada

3. Perhatikan bahwa plat nomor di negara tersebut berbentuk

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

, dengan

   1. p_1 adalah huruf kapital (dari A-Z), akibatnya ada 26 cara untuk mengisi p_1
   2. p_2, p_3, p_4 adalah digit bilangan desimal, akibatnya ada 10 cara untuk mengisi masing-masing p_2, p_3, p_4
   3. p_5 dan p_6 adalah huruf kapital (dari A-Z), akibatnya ada

3. Perhatikan bahwa plat nomor di negara tersebut berbentuk

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

, dengan

   1. p_1 adalah huruf kapital (dari A-Z), akibatnya ada 26 cara untuk mengisi p_1
   2. p_2, p_3, p_4 adalah digit bilangan desimal, akibatnya ada 10 cara untuk mengisi masing-masing p_2, p_3, p_4
   3. p_5 dan p_6 adalah huruf kapital (dari A-Z), akibatnya ada 26 cara untuk mengisi masing-masing p_5 dan p_6.

Berdasarkan aturan perkalian, banyaknya kombinasi plat nomor berbeda adalah

3. Perhatikan bahwa plat nomor di negara tersebut berbentuk

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

, dengan

   1. p_1 adalah huruf kapital (dari A-Z), akibatnya ada 26 cara untuk mengisi p_1
   2. p_2, p_3, p_4 adalah digit bilangan desimal, akibatnya ada 10 cara untuk mengisi masing-masing p_2, p_3, p_4
   3. p_5 dan p_6 adalah huruf kapital (dari A-Z), akibatnya ada 26 cara untuk mengisi masing-masing p_5 dan p_6.

Berdasarkan aturan perkalian, banyaknya kombinasi plat nomor berbeda adalah $26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = (260)^3 = 17\,576\,000$ plat nomor.

Bahasan

Latihan 1

Latihan

1. Diberikan himpunan tak kosong A dan B yang keduanya berhingga. Jika $|A| = m$ dan $|B| = n$, tentukan banyaknya fungsi total berbeda dari A ke B. Selanjutnya tentukan banyaknya fungsi total berbeda dari B ke A.
2. Di sebuah sekolah terdapat m orang anak perempuan dan n orang anak laki-laki dengan $m < n$. Sekolah tersebut akan mengadakan pesta dansa. Setiap anak perempuan memilih tepat seorang anak laki-laki untuk menemaninya pergi ke pesta dansa. Tentukan banyaknya kombinasi pasangan dansa yang mungkin.
3. Sebuah komputer tahun 1980-an dapat diaktifkan dengan *password* yang terdiri atas 6 karakter. Setiap karakter adalah huruf kapital (A-Z) atau digit bilangan desimal. Jika *password* harus memuat minimal satu digit bilangan desimal, ada berapa banyak *password* yang mungkin?

Solusi Soal 1 Latihan 1

Karena $|A| = m$ dan $|B| = n$, kita misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Solusi Soal 1 Latihan 1

Karena $|A| = m$ dan $|B| = n$, kita misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Pertama akan dihitung banyaknya fungsi total berbeda dari A ke B.

Solusi Soal 1 Latihan 1

Karena $|A| = m$ dan $|B| = n$, kita misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Pertama akan dihitung banyaknya fungsi total berbeda dari A ke B. Misalkan $f : A \to B$ adalah suatu fungsi total, tinjau bahwa:

- banyaknya pilihan untuk $f(a_1)$ ada

Solusi Soal 1 Latihan 1

Karena $|A| = m$ dan $|B| = n$, kita misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Pertama akan dihitung banyaknya fungsi total berbeda dari A ke B. Misalkan $f : A \to B$ adalah suatu fungsi total, tinjau bahwa:

- banyaknya pilihan untuk $f(a_1)$ ada n,
- banyaknya pilihan untuk $f(a_2)$ ada

Solusi Soal 1 Latihan 1

Karena $|A| = m$ dan $|B| = n$, kita misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Pertama akan dihitung banyaknya fungsi total berbeda dari A ke B. Misalkan $f : A \to B$ adalah suatu fungsi total, tinjau bahwa:

- banyaknya pilihan untuk $f(a_1)$ ada n,
- banyaknya pilihan untuk $f(a_2)$ ada n,
- $\vdots$
- dan banyaknya pilihan untuk $f(a_m)$ ada

Solusi Soal 1 Latihan 1

Karena $|A| = m$ dan $|B| = n$, kita misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Pertama akan dihitung banyaknya fungsi total berbeda dari A ke B. Misalkan $f : A \to B$ adalah suatu fungsi total, tinjau bahwa:

- banyaknya pilihan untuk $f(a_1)$ ada n,
- banyaknya pilihan untuk $f(a_2)$ ada n,
- $\vdots$
- dan banyaknya pilihan untuk $f(a_m)$ ada n.

Akibatnya berdasarkan aturan perkalian ada

Solusi Soal 1 Latihan 1

Karena $|A| = m$ dan $|B| = n$, kita misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Pertama akan dihitung banyaknya fungsi total berbeda dari A ke B. Misalkan $f : A \to B$ adalah suatu fungsi total, tinjau bahwa:

- banyaknya pilihan untuk $f(a_1)$ ada n,
- banyaknya pilihan untuk $f(a_2)$ ada n,
- $\vdots$
- dan banyaknya pilihan untuk $f(a_m)$ ada n.

Akibatnya berdasarkan aturan perkalian ada $\prod_{i=1}^{m} n = n^m$ fungsi total berbeda dari A ke B.

Solusi Soal 1 Latihan 1

Karena $|A| = m$ dan $|B| = n$, kita misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Pertama akan dihitung banyaknya fungsi total berbeda dari A ke B. Misalkan $f : A \to B$ adalah suatu fungsi total, tinjau bahwa:

- banyaknya pilihan untuk $f(a_1)$ ada n,
- banyaknya pilihan untuk $f(a_2)$ ada n,
- $\vdots$
- dan banyaknya pilihan untuk $f(a_m)$ ada n.

Akibatnya berdasarkan aturan perkalian ada $\prod_{i=1}^{m} n = n^m$ fungsi total berbeda dari A ke B. Dengan cara yang serupa banyaknya fungsi total berbeda dari B ke A ada sebanyak

Solusi Soal 1 Latihan 1

Karena $|A| = m$ dan $|B| = n$, kita misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Pertama akan dihitung banyaknya fungsi total berbeda dari A ke B. Misalkan $f : A \to B$ adalah suatu fungsi total, tinjau bahwa:

- banyaknya pilihan untuk $f(a_1)$ ada n,
- banyaknya pilihan untuk $f(a_2)$ ada n,
- $\vdots$
- dan banyaknya pilihan untuk $f(a_m)$ ada n.

Akibatnya berdasarkan aturan perkalian ada $\prod_{i=1}^{m} n = n^m$ fungsi total berbeda dari A ke B. Dengan cara yang serupa banyaknya fungsi total berbeda dari B ke A ada sebanyak m^n.

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 1)

Misalkan

$$\begin{aligned} X &= \{x : x \text{ anak perempuan di sekolah tersebut}\}, \\ Y &= \{y : y \text{ anak laki-laki di sekolah tersebut}\}. \end{aligned}$$

Karena $|X| = m$ dan $|Y| = n$ kita misalkan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Perhatikan bahwa

- x_1 dapat memilih

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 1)

Misalkan

$$
\begin{aligned}
X &= \{x : x \text{ anak perempuan di sekolah tersebut}\},\\
Y &= \{y : y \text{ anak laki-laki di sekolah tersebut}\}.
\end{aligned}
$$

Karena $|X| = m$ dan $|Y| = n$ kita misalkan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Perhatikan bahwa

- x_1 dapat memilih n orang diantara $y_1, y_2 \ldots, y_n$.

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 1)

Misalkan

$$\begin{aligned} X &= \{x : x \text{ anak perempuan di sekolah tersebut}\}, \\ Y &= \{y : y \text{ anak laki-laki di sekolah tersebut}\}. \end{aligned}$$

Karena $|X| = m$ dan $|Y| = n$ kita misalkan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Perhatikan bahwa

- x_1 dapat memilih n orang diantara $y_1, y_2 \ldots, y_n$.
- Selanjutnya karena x_2 tidak dapat memilih orang yang dipilih x_1, maka terdapat

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 1)

Misalkan

$$\begin{aligned} X &= \{x : x \text{ anak perempuan di sekolah tersebut}\}, \\ Y &= \{y : y \text{ anak laki-laki di sekolah tersebut}\}. \end{aligned}$$

Karena $|X| = m$ dan $|Y| = n$ kita misalkan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Perhatikan bahwa

- x_1 dapat memilih n orang diantara $y_1, y_2 \ldots, y_n$.
- Selanjutnya karena x_2 tidak dapat memilih orang yang dipilih x_1, maka terdapat $n-1$ pilihan untuk x_2.

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 1)

Misalkan

$$\begin{aligned} X &= \{x : x \text{ anak perempuan di sekolah tersebut}\}, \\ Y &= \{y : y \text{ anak laki-laki di sekolah tersebut}\}. \end{aligned}$$

Karena $|X| = m$ dan $|Y| = n$ kita misalkan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Perhatikan bahwa

- x_1 dapat memilih n orang diantara $y_1, y_2 \ldots, y_n$.
- Selanjutnya karena x_2 tidak dapat memilih orang yang dipilih x_1, maka terdapat $n - 1$ pilihan untuk x_2.
- Kemudian karena x_3 tidak dapat memilih orang yang dipilih x_1 ataupun x_2, maka terdapat

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 1)

Misalkan

$$\begin{aligned} X &= \{x : x \text{ anak perempuan di sekolah tersebut}\}, \\ Y &= \{y : y \text{ anak laki-laki di sekolah tersebut}\}. \end{aligned}$$

Karena $|X| = m$ dan $|Y| = n$ kita misalkan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Perhatikan bahwa

- x_1 dapat memilih n orang diantara $y_1, y_2 \ldots, y_n$.
- Selanjutnya karena x_2 tidak dapat memilih orang yang dipilih x_1, maka terdapat $n-1$ pilihan untuk x_2.
- Kemudian karena x_3 tidak dapat memilih orang yang dipilih x_1 ataupun x_2, maka terdapat $n-2$ pilihan untuk x_3.

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 1)

Misalkan

$$\begin{aligned} X &= \{x : x \text{ anak perempuan di sekolah tersebut}\}, \\ Y &= \{y : y \text{ anak laki-laki di sekolah tersebut}\}. \end{aligned}$$

Karena $|X| = m$ dan $|Y| = n$ kita misalkan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Perhatikan bahwa

- x_1 dapat memilih n orang diantara $y_1, y_2 \ldots, y_n$.
- Selanjutnya karena x_2 tidak dapat memilih orang yang dipilih x_1, maka terdapat $n-1$ pilihan untuk x_2.
- Kemudian karena x_3 tidak dapat memilih orang yang dipilih x_1 ataupun x_2, maka terdapat $n-2$ pilihan untuk x_3.
- Dan seterusnya sehingga untuk setiap $i = 2, \ldots, m$, x_i tidak dapat memilih orang yang dipilih oleh $x_1, \ldots, x_{i-1}$. Jadi secara umum banyaknya pilihan pasangan dansa untuk x_i dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ adalah

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 1)

Misalkan

$$\begin{aligned} X &= \{x : x \text{ anak perempuan di sekolah tersebut}\}, \\ Y &= \{y : y \text{ anak laki-laki di sekolah tersebut}\}. \end{aligned}$$

Karena $|X| = m$ dan $|Y| = n$ kita misalkan $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Perhatikan bahwa

- x_1 dapat memilih n orang diantara $y_1, y_2 \ldots, y_n$.
- Selanjutnya karena x_2 tidak dapat memilih orang yang dipilih x_1, maka terdapat $n-1$ pilihan untuk x_2.
- Kemudian karena x_3 tidak dapat memilih orang yang dipilih x_1 ataupun x_2, maka terdapat $n-2$ pilihan untuk x_3.
- Dan seterusnya sehingga untuk setiap $i = 2, \ldots, m$, x_i tidak dapat memilih orang yang dipilih oleh $x_1, \ldots, x_{i-1}$. Jadi secara umum banyaknya pilihan pasangan dansa untuk x_i dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ adalah $n - i + 1$.

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 2)

Berdasarkan aturan perkalian banyaknya kombinasi pasangan dansa yang mungkin adalah

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(m-1)) =$$

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 2)

Berdasarkan aturan perkalian banyaknya kombinasi pasangan dansa yang mungkin adalah

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(m-1)) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)$$

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 2)

Berdasarkan aturan perkalian banyaknya kombinasi pasangan dansa yang mungkin adalah

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(m-1)) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)$$

Ekspresi terakhir dikenal dengan permutasi-m dari n objek berbeda. Tinjau bahwa

Solusi Soal 2 Latihan 1 (Bagian 2)

Berdasarkan aturan perkalian banyaknya kombinasi pasangan dansa yang mungkin adalah

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(m-1)) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)$$

Ekspresi terakhir dikenal dengan permutasi-m dari n objek berbeda. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)\,(n-m)!}{(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!} \end{aligned}$$

Bentuk terakhir juga kita kenal dengan notasi $P(n,m)$ atau P_m^n atau ${}_nP_m$ atau ${}^nP_m$ atau $P_{n,m}$.

(Catatan: pada dasarnya masalah pada soal ini setara dengan permasalahan menghitung banyaknya fungsi total yang bersifat injektif dari X ke Y dengan $|X| < |Y|$, lihat buku teks).

Solusi Soal 3 Latihan 1

Misalkan P : $\#$ *password* dengan panjang 6 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Mencari P secara langsung dapat dilakukan, tapi memerlukan waktu dan tenaga yang lebih banyak. Kita dapat mencari P dengan cara berikut

Solusi Soal 3 Latihan 1

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Mencari P secara langsung dapat dilakukan, tapi memerlukan waktu dan tenaga yang lebih banyak. Kita dapat mencari P dengan cara berikut

$$P = S - Q,$$

Solusi Soal 3 Latihan 1

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Mencari P secara langsung dapat dilakukan, tapi memerlukan waktu dan tenaga yang lebih banyak. Kita dapat mencari P dengan cara berikut

$$P = S - Q,$$

1. S : # kombinasi string dengan panjang 6 atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal) yang mungkin.

Solusi Soal 3 Latihan 1

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Mencari P secara langsung dapat dilakukan, tapi memerlukan waktu dan tenaga yang lebih banyak. Kita dapat mencari P dengan cara berikut

$$P = S - Q,$$

1. S : # kombinasi string dengan panjang 6 atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal) yang mungkin.
2. Q : # kombinasi string dengan panjang 6 yang sama sekali tidak memuat digit bilangan desimal.

Berdasarkan aturan perkalian kita memiliki $S = 36^6$ dan $Q = 26^6$. Jadi $P = 36^6 - 26^6 = 1\,867\,866\,560$.

Latihan 2

Latihan

1. String biner atau bit string adalah string yang hanya memuat karakter atas himpunan $\{0, 1\}$ saja. Panjang dari suatu string merupakan banyaknya digit yang ada pada string tersebut. Sebagai contoh string 10110 adalah string biner dengan panjang 5. Tentukan banyaknya string biner dengan panjang 8.
2. Sebuah komputer tahun 1980-an dapat diaktifkan dengan *password* yang terdiri atas 6, 7, atau 8 karakter. Setiap karakter adalah huruf kapital (A-Z) atau digit bilangan desimal. Ada berapa banyak *password* yang mungkin?
3. *Password* yang diperlukan pada suatu sistem harus memuat 6, 7, atau 8 karakter. Setiap karakter adalah digit bilangan desimal atau huruf kapital dalam alfabet A-Z. Setiap *password* harus memuat setidaknya satu bilangan desimal. Ada berapa banyak *password* yang berbeda?

Solusi Soal 1 Latihan 2

Sebuah bit string dengan panjang 8 pasti berbentuk

Solusi Soal 1 Latihan 2

Sebuah bit string dengan panjang 8 pasti berbentuk

$$s_1 \; s_2 \; s_3 \; s_4 \; s_5 \; s_6 \; s_7 \; s_8,$$

setiap s_i untuk $1 \leq i \leq 8$ memiliki dua kemungkinan, yaitu 0 atau 1. Berdasarkan aturan perkalian ada sebanyak

Solusi Soal 1 Latihan 2

Sebuah bit string dengan panjang 8 pasti berbentuk

$$s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8,$$

setiap s_i untuk $1 \leq i \leq 8$ memiliki dua kemungkinan, yaitu 0 atau 1. Berdasarkan aturan perkalian ada sebanyak

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$$

bit string dengan panjang 8.

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan

- P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8,

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan

- P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8,
- P_i : # *password* dengan panjang i

Akibatnya $P =$

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan

- P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8,
- P_i : # *password* dengan panjang i

Akibatnya $P = P_6 + P_7 + P_8$.

Kita memiliki
P_i : # kombinasi string dengan panjang i atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal). Berdasarkan aturan perkalian $P_i =$

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan

- P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8,
- P_i : # *password* dengan panjang i

Akibatnya $P = P_6 + P_7 + P_8$.

Kita memiliki
P_i : # kombinasi string dengan panjang i atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal). Berdasarkan aturan perkalian $P_i = (36)^i$.

Jadi

$$P =$$

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan

- P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8,
- P_i : # *password* dengan panjang i

Akibatnya $P = P_6 + P_7 + P_8$.

Kita memiliki
P_i : # kombinasi string dengan panjang i atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal). Berdasarkan aturan perkalian $P_i = (36)^i$.

Jadi

$$\begin{aligned} P &= P_6 + P_7 + P_8 \\ &= \end{aligned}$$

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan

- P : $\#$ *password* dengan panjang 6, 7, atau 8,
- P_i : $\#$ *password* dengan panjang i

Akibatnya $P = P_6 + P_7 + P_8$.

Kita memiliki
P_i : $\#$ kombinasi string dengan panjang i atas 36 karakter $(26$ alfabet dan 10 bilangan desimal). Berdasarkan aturan perkalian $P_i = (36)^i$.

Jadi

$$\begin{aligned} P &= P_6 + P_7 + P_8 \\ &= 36^6 + 36^7 + 36^8 \\ &= \end{aligned}$$

Solusi Soal 2 Latihan 2

Misalkan

- P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8,
- P_i : # *password* dengan panjang i

Akibatnya $P = P_6 + P_7 + P_8$.

Kita memiliki
P_i : # kombinasi string dengan panjang i atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal). Berdasarkan aturan perkalian $P_i = (36)^i$.

Jadi

$$\begin{aligned} P &= P_6 + P_7 + P_8 \\ &= 36^6 + 36^7 + 36^8 \\ &= 36^6 \left(1 + 36 + 36^2\right) \\ &= 2\,901\,650\,853\,888 \end{aligned}$$

Solusi Soal 3 Latihan 2

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal.

Solusi Soal 3 Latihan 2

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Misalkan P_i : # *password* dengan panjang i yang memuat minimal satu digit bilangan desimal.

Solusi Soal 3 Latihan 2

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Misalkan P_i : # *password* dengan panjang i yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan pejumlahan
$P =$

Solusi Soal 3 Latihan 2

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Misalkan P_i : # *password* dengan panjang i yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan pejumlahan
$P = P_6 + P_7 + P_8$.

Solusi Soal 3 Latihan 2

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Misalkan P_i : # *password* dengan panjang i yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan pejumlahan $P = P_6 + P_7 + P_8$. Kita dapat mencari P_i dengan cara berikut

$$P_i = S_i - Q_i$$

1. S_i :

Solusi Soal 3 Latihan 2

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Misalkan P_i : # *password* dengan panjang i yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan pejumlahan $P = P_6 + P_7 + P_8$. Kita dapat mencari P_i dengan cara berikut

$$P_i = S_i - Q_i$$

1. S_i : # kombinasi string dengan panjang i atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal). Berdasarkan aturan perkalian $S_i =$

Solusi Soal 3 Latihan 2

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Misalkan P_i : # *password* dengan panjang i yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan pejumlahan $P = P_6 + P_7 + P_8$. Kita dapat mencari P_i dengan cara berikut

$$P_i = S_i - Q_i$$

1. S_i : # kombinasi string dengan panjang i atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal). Berdasarkan aturan perkalian $S_i = (36)^i$.
2. Q_i :

Solusi Soal 3 Latihan 2

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Misalkan P_i : # *password* dengan panjang i yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan pejumlahan $P = P_6 + P_7 + P_8$. Kita dapat mencari P_i dengan cara berikut

$$P_i = S_i - Q_i$$

1. S_i : # kombinasi string dengan panjang i atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal). Berdasarkan aturan perkalian $S_i = (36)^i$.
2. Q_i : # kombinasi string dengan panjang i yang sama sekali tidak memuat digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan perkalian $Q_i =$

Solusi Soal 3 Latihan 2

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Misalkan P_i : # *password* dengan panjang i yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan pejumlahan $P = P_6 + P_7 + P_8$. Kita dapat mencari P_i dengan cara berikut

$$P_i = S_i - Q_i$$

1. S_i : # kombinasi string dengan panjang i atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal). Berdasarkan aturan perkalian $S_i = (36)^i$.
2. Q_i : # kombinasi string dengan panjang i yang sama sekali tidak memuat digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan perkalian $Q_i = (26)^i$.

Akibatnya

$$\begin{aligned} P &= P_6 + P_7 + P_8 \\ &= \end{aligned}$$

Solusi Soal 3 Latihan 2

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Misalkan P_i : # *password* dengan panjang i yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan pejumlahan $P = P_6 + P_7 + P_8$. Kita dapat mencari P_i dengan cara berikut

$$P_i = S_i - Q_i$$

1. S_i : # kombinasi string dengan panjang i atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal). Berdasarkan aturan perkalian $S_i = (36)^i$.
2. Q_i : # kombinasi string dengan panjang i yang sama sekali tidak memuat digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan perkalian $Q_i = (26)^i$.

Akibatnya

$$\begin{aligned} P &= P_6 + P_7 + P_8 \\ &= (S_6 - Q_6) + (S_7 - Q_7) + (S_8 - Q_8) \\ &= \end{aligned}$$

Solusi Soal 3 Latihan 2

Misalkan P : # *password* dengan panjang 6, 7, atau 8 yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Misalkan P_i : # *password* dengan panjang i yang memuat minimal satu digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan pejumlahan $P = P_6 + P_7 + P_8$. Kita dapat mencari P_i dengan cara berikut

$$P_i = S_i - Q_i$$

1. S_i : # kombinasi string dengan panjang i atas 36 karakter (26 alfabet dan 10 bilangan desimal). Berdasarkan aturan perkalian $S_i = (36)^i$.
2. Q_i : # kombinasi string dengan panjang i yang sama sekali tidak memuat digit bilangan desimal. Berdasarkan aturan perkalian $Q_i = (26)^i$.

Akibatnya

$$\begin{aligned} P &= P_6 + P_7 + P_8 \\ &= (S_6 - Q_6) + (S_7 - Q_7) + (S_8 - Q_8) \\ &= \left(36^6 - 26^6\right) + \left(36^7 - 26^7\right) + \left(36^8 - 26^8\right) \\ &= 2\,684\,483\,063\,360. \end{aligned}$$

Challenging Problems

Challenging Problems

1. Seorang *hacker* ingin mengetahui sebuah *password* administrator di sebuah forum. *Hacker* tersebut akan menerapkan algoritma *brute-force* (mencoba semua kemungkinan *password* yang ada). Dia mengetahui bahwa:
    1. *password* memuat 8 sampai 12 karakter, setiap karakternya adalah angka, huruf kapital, atau huruf kecil,
    2. *password* tidak boleh semuanya angka atau semuanya huruf.

    Jika algoritma *hacker* tersebut dapat mencoba 100 *password* dalam 1 detik, tentukan lama waktu maksimum yang diperlukan *hacker* tersebut untuk menemukan *password* yang tepat.
2. Di sebuah kelas di suatu sekolah terdapat 10 orang anak perempuan dan 15 orang anak laki-laki. Sekolah mereka akan mengadakan pesta dansa. Setiap anak perempuan akan memilih paling banyak seorang anak lak-laki di kelasnya untuk menemaninya pergi ke pesta dansa (boleh jadi dia memilih anak laki-laki yang berasal dari kelas lain). Tentukan banyaknya kemungkinan pasangan dansa yang ada <u>di kelas tersebut</u>.

Bahasan

Motivasi: Mengapa Perlu Aturan Pengurangan?

Latihan (Masalah string biner)

String biner adalah string yang hanya memuat karakter atas himpunan $\{0, 1\}$ saja. Panjang dari suatu string merupakan banyaknya digit yang ada pada string tersebut. Sebagai contoh string 10110 adalah string biner dengan panjang 5. Tentukan banyaknya string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 **atau** diakhiri dengan 00.

Perhatikan bahwa jika s adalah string biner dengan panjang 8 yang memenuhi kriteria, maka s berbentuk

Motivasi: Mengapa Perlu Aturan Pengurangan?

Latihan (Masalah string biner)

String biner adalah string yang hanya memuat karakter atas himpunan $\{0, 1\}$ saja. Panjang dari suatu string merupakan banyaknya digit yang ada pada string tersebut. Sebagai contoh string 10110 adalah string biner dengan panjang 5. Tentukan banyaknya string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 **atau** diakhiri dengan 00.

Perhatikan bahwa jika s adalah string biner dengan panjang 8 yang memenuhi kriteria, maka s berbentuk

$$1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8 \text{ atau}$$

Motivasi: Mengapa Perlu Aturan Pengurangan?

Latihan (Masalah string biner)

String biner adalah string yang hanya memuat karakter atas himpunan $\{0, 1\}$ saja. Panjang dari suatu string merupakan banyaknya digit yang ada pada string tersebut. Sebagai contoh string 10110 adalah string biner dengan panjang 5. Tentukan banyaknya string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 **atau** diakhiri dengan 00.

Perhatikan bahwa jika s adalah string biner dengan panjang 8 yang memenuhi kriteria, maka s berbentuk

$1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$ atau

$s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ 0\ 0$ atau

Motivasi: Mengapa Perlu Aturan Pengurangan?

Latihan (Masalah string biner)

String biner adalah string yang hanya memuat karakter atas himpunan $\{0, 1\}$ saja. Panjang dari suatu string merupakan banyaknya digit yang ada pada string tersebut. Sebagai contoh string 10110 adalah string biner dengan panjang 5. Tentukan banyaknya string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 **atau** diakhiri dengan 00.

Perhatikan bahwa jika s adalah string biner dengan panjang 8 yang memenuhi kriteria, maka s berbentuk

$1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$ atau

$s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ 0\ 0$ atau

$1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ 0\ 0$.

Pekerjaan 1: string biner dengan awalan 1

Konstruksi string biner dengan awalan 1 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$) dapat dilakukan berikut:

Pekerjaan 1: string biner dengan awalan 1

Konstruksi string biner dengan awalan 1 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat satu cara untuk memilih digit pertama (digit pertama harus 1)

Pekerjaan 1: string biner dengan awalan 1

Konstruksi string biner dengan awalan 1 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat satu cara untuk memilih digit pertama (digit pertama harus 1)
- terdapat masing-masing dua cara untuk memilih digit ke-i untuk $i = 2, \ldots, 8$.

Berdasarkan aturan perkalian, pekerjaan 1 dapat dilakukan dalam

Pekerjaan 1: string biner dengan awalan 1

Konstruksi string biner dengan awalan 1 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat satu cara untuk memilih digit pertama (digit pertama harus 1)
- terdapat masing-masing dua cara untuk memilih digit ke-i untuk $i = 2, \ldots, 8$.

Berdasarkan aturan perkalian, pekerjaan 1 dapat dilakukan dalam $2^7 = 128$ cara.

Pekerjaan 2: string biner dengan akhiran 00

Konstruksi string biner dengan akhiran 00 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ 0\ 0$) dapat dilakukan berikut:

Pekerjaan 1: string biner dengan awalan 1

Konstruksi string biner dengan awalan 1 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat satu cara untuk memilih digit pertama (digit pertama harus 1)
- terdapat masing-masing dua cara untuk memilih digit ke-i untuk $i = 2, \ldots, 8$.

Berdasarkan aturan perkalian, pekerjaan 1 dapat dilakukan dalam $2^7 = 128$ cara.

Pekerjaan 2: string biner dengan akhiran 00

Konstruksi string biner dengan akhiran 00 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ 0\ 0$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat masing-masing dua cara untuk memilih digit ke-i untuk $i = 1, \ldots, 6$

Pekerjaan 1: string biner dengan awalan 1

Konstruksi string biner dengan awalan 1 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat satu cara untuk memilih digit pertama (digit pertama harus 1)
- terdapat masing-masing dua cara untuk memilih digit ke-i untuk $i = 2, \ldots, 8$.

Berdasarkan aturan perkalian, pekerjaan 1 dapat dilakukan dalam $2^7 = 128$ cara.

Pekerjaan 2: string biner dengan akhiran 00

Konstruksi string biner dengan akhiran 00 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ 0\ 0$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat masing-masing dua cara untuk memilih digit ke-i untuk $i = 1, \ldots, 6$
- terdapat masing-masing satu cara untuk memilih digit ke-7 dan ke-8 (digit ke-7 dan ke-8 keduanya harus 0).

Berdasarkan aturan perkalian, pekerjaan 2 dapat dilakukan dalam

Pekerjaan 1: string biner dengan awalan 1

Konstruksi string biner dengan awalan 1 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat satu cara untuk memilih digit pertama (digit pertama harus 1)
- terdapat masing-masing dua cara untuk memilih digit ke-i untuk $i = 2, \ldots, 8$.

Berdasarkan aturan perkalian, pekerjaan 1 dapat dilakukan dalam $2^7 = 128$ cara.

Pekerjaan 2: string biner dengan akhiran 00

Konstruksi string biner dengan akhiran 00 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ 0\ 0$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat masing-masing dua cara untuk memilih digit ke-i untuk $i = 1, \ldots, 6$
- terdapat masing-masing satu cara untuk memilih digit ke-7 dan ke-8 (digit ke-7 dan ke-8 keduanya harus 0).

Berdasarkan aturan perkalian, pekerjaan 2 dapat dilakukan dalam $2^6 = 64$ cara.

Apakah dengan demikian dapat disimpukan (dengan aturan penjumlahan) bahwa terdapat $128 + 64 = 192$ string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 atau diakhiri dengan 00?

Apakah dengan demikian dapat disimpukan (dengan aturan penjumlahan) bahwa terdapat $128 + 64 = 192$ string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 atau diakhiri dengan 00? Tidak, karena di sini pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dapat dilakukan bersamaan.

Apakah dengan demikian dapat disimpukan (dengan aturan penjumlahan) bahwa terdapat $128 + 64 = 192$ string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 atau diakhiri dengan 00? Tidak, karena di sini pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dapat dilakukan bersamaan. Akibatnya aturan penjumlahan biasa di sini tidak berlaku.

Apakah dengan demikian dapat disimpukan (dengan aturan penjumlahan) bahwa terdapat $128 + 64 = 192$ string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 atau diakhiri dengan 00? Tidak, karena di sini pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dapat dilakukan bersamaan. Akibatnya aturan penjumlahan biasa di sini tidak berlaku. Agar aturan penjumlahan dapat dipakai, kita harus mengurangi hasil yang telah diperoleh dengan banyaknya kasus ketika pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dilakukan bersamaan.

Pekerjaan 1 dan 2 bersamaan: string biner dengan awalan 1 dan akhiran 00

Apakah dengan demikian dapat disimpukan (dengan aturan penjumlahan) bahwa terdapat $128 + 64 = 192$ string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 atau diakhiri dengan 00? Tidak, karena di sini pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dapat dilakukan bersamaan. Akibatnya aturan penjumlahan biasa di sini tidak berlaku. Agar aturan penjumlahan dapat dipakai, kita harus mengurangi hasil yang telah diperoleh dengan banyaknya kasus ketika pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dilakukan bersamaan.

Pekerjaan 1 dan 2 bersamaan: string biner dengan awalan 1 dan akhiran 00

Konstruksi string biner dengan awalan 1 **dan** akhiran 00 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ 0\ 0$) dapat dilakukan berikut:

Apakah dengan demikian dapat disimpukan (dengan aturan penjumlahan) bahwa terdapat $128 + 64 = 192$ string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 atau diakhiri dengan 00? Tidak, karena di sini pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dapat dilakukan bersamaan. Akibatnya aturan penjumlahan biasa di sini tidak berlaku. Agar aturan penjumlahan dapat dipakai, kita harus mengurangi hasil yang telah diperoleh dengan banyaknya kasus ketika pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dilakukan bersamaan.

Pekerjaan 1 dan 2 bersamaan: string biner dengan awalan 1 dan akhiran 00

Konstruksi string biner dengan awalan 1 **dan** akhiran 00 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ 0\ 0$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat masing-masing satu cara untuk memilih digit pertama, ke-7, dan ke-8 (digit pertama harus 1, digit ke-7 dan ke-8 keduanya harus 0)

Apakah dengan demikian dapat disimpukan (dengan aturan penjumlahan) bahwa terdapat $128 + 64 = 192$ string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 atau diakhiri dengan 00? Tidak, karena di sini pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dapat dilakukan bersamaan. Akibatnya aturan penjumlahan biasa di sini tidak berlaku. Agar aturan penjumlahan dapat dipakai, kita harus mengurangi hasil yang telah diperoleh dengan banyaknya kasus ketika pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dilakukan bersamaan.

Pekerjaan 1 dan 2 bersamaan: string biner dengan awalan 1 dan akhiran 00

Konstruksi string biner dengan awalan 1 **dan** akhiran 00 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ 0\ 0$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat masing-masing satu cara untuk memilih digit pertama, ke-7, dan ke-8 (digit pertama harus 1, digit ke-7 dan ke-8 keduanya harus 0)
- terdapat masing-masing dua cara untuk memilih digit ke-i untuk $i = 2, 3, \ldots, 6$.

Berdasarkan aturan perkalian, pekerjaan 1 dan 2 dapat dilakukan bersamaan dalam

Apakah dengan demikian dapat disimpukan (dengan aturan penjumlahan) bahwa terdapat $128 + 64 = 192$ string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 atau diakhiri dengan 00? Tidak, karena di sini pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dapat dilakukan bersamaan. Akibatnya aturan penjumlahan biasa di sini tidak berlaku. Agar aturan penjumlahan dapat dipakai, kita harus mengurangi hasil yang telah diperoleh dengan banyaknya kasus ketika pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dilakukan bersamaan.

Pekerjaan 1 dan 2 bersamaan: string biner dengan awalan 1 dan akhiran 00

Konstruksi string biner dengan awalan 1 **dan** akhiran 00 dengan panjang 8 (yaitu yang berbentuk $1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ 0\ 0$) dapat dilakukan berikut:

- terdapat masing-masing satu cara untuk memilih digit pertama, ke-7, dan ke-8 (digit pertama harus 1, digit ke-7 dan ke-8 keduanya harus 0)
- terdapat masing-masing dua cara untuk memilih digit ke-i untuk $i = 2, 3, \ldots, 6$.

Berdasarkan aturan perkalian, pekerjaan 1 dan 2 dapat dilakukan bersamaan dalam $2^5 = 32$ kasus.

Kita dapat menyimpulkan hal berikut:
Karena terdapat 128 cara untuk melakukan pekerjaan 1 dan 64 cara untuk melakukan pekerjaan 2, serta ada 32 kasus ketika pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dapat dilakukan bersamaan, maka terdapat

Kita dapat menyimpulkan hal berikut:
Karena terdapat 128 cara untuk melakukan pekerjaan 1 dan 64 cara untuk melakukan pekerjaan 2, serta ada 32 kasus ketika pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dapat dilakukan bersamaan, maka terdapat

$$128 + 64 - 32 = 160$$

cara untuk <u>melakukan pekerjaan 1 atau pekerjaan 2</u>.

Kita dapat menyimpulkan hal berikut:
Karena terdapat 128 cara untuk melakukan pekerjaan 1 dan 64 cara untuk melakukan pekerjaan 2, serta ada 32 kasus ketika pekerjaan 1 dan pekerjaan 2 dapat dilakukan bersamaan, maka terdapat

$$128 + 64 - 32 = 160$$

cara untuk melakukan pekerjaan 1 atau pekerjaan 2. Dengan perkataan lain ada sebanyak 160 string biner dengan panjang 8 yang dimulai dengan 1 atau diakhiri dengan 00.
Dalam teori himpunan, aturan di atas berkaitan dengan teorema berikut.

Teorema (Prinsip inklusi-eksklusi/ aturan pengurangan (*subtraction rule*))

Jika A dan B dua himpunan berhingga yang tidak saling lepas, maka

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Aturan Pengurangan/ Prinsip Inklusi-Eksklusi

Kita memiliki

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) \\ &\quad + (|A \cap B \cap C|)\,. \end{aligned}$$

Melalui induksi matematika dapat diperoleh teorema berikut.

Teorema (Prinsip Inklusi-Eksklusi)

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan berhingga, maka

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| =$$

Teorema (Prinsip Inklusi-Eksklusi)

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan berhingga, maka

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= |A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n| \\ &= \end{aligned}$$

Teorema (Prinsip Inklusi-Eksklusi)

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan berhingga, maka

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| &= |A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n| \\ &= \sum_{1 \le i \le n} |A_i| \\ &- \end{aligned}$$

Teorema (Prinsip Inklusi-Eksklusi)

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan berhingga, maka

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= |A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n| \\ &= \sum_{1 \le i \le n} |A_i| \\ &\quad - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \end{aligned}$$

Teorema (Prinsip Inklusi-Eksklusi)

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan berhingga, maka

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= |A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n| \\ &= \sum_{1\leq i\leq n} |A_i| \\ &\quad - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad -\end{aligned}$$

Teorema (Prinsip Inklusi-Eksklusi)

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan berhingga, maka

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= |A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n| \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| \\
&\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&\quad - \cdots \\
&\quad +
\end{aligned}$$

Teorema (Prinsip Inklusi-Eksklusi)

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan berhingga, maka

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= |A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n| \\ &= \sum_{1\le i\le n} |A_i| \\ &\quad - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad - \cdots \\ &\quad + (-1)^{n+1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.\end{aligned}$$

Latihan 3

Latihan

Ada berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100 dengan sifat habis dibagi 6 atau 9?

Solusi: Tinjau bahwa terdapat 100 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100.

Latihan 3

Latihan

Ada berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100 dengan sifat habis dibagi 6 atau 9?

Solusi: Tinjau bahwa terdapat 100 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100. Misalkan

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 9\}. \end{aligned}$$

Latihan 3

Latihan

Ada berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100 dengan sifat habis dibagi 6 atau 9?

Solusi: Tinjau bahwa terdapat 100 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100. Misalkan

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 9\}. \end{aligned}$$

Kita memiliki $|A| =$

Latihan 3

Latihan

Ada berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100 dengan sifat habis dibagi 6 atau 9?

Solusi: Tinjau bahwa terdapat 100 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100. Misalkan

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 9\}. \end{aligned}$$

Kita memiliki $|A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ dan $|B| =$

Latihan 3

Latihan

Ada berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100 dengan sifat habis dibagi 6 atau 9?

Solusi: Tinjau bahwa terdapat 100 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100. Misalkan

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 9\}. \end{aligned}$$

Kita memiliki $|A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ dan $|B| = \left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor = 11$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6 \text{ dan } 9\} \\ &= \end{aligned}$$

Latihan 3

Latihan

Ada berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100 dengan sifat habis dibagi 6 atau 9?

Solusi: Tinjau bahwa terdapat 100 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100. Misalkan

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 9\}. \end{aligned}$$

Kita memiliki $|A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ dan $|B| = \left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor = 11$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6 \text{ dan } 9\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } \operatorname{lcm}(6,9)\} \\ &= \end{aligned}$$

Latihan 3

Latihan

Ada berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100 dengan sifat habis dibagi 6 atau 9?

Solusi: Tinjau bahwa terdapat 100 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100. Misalkan

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 9\}. \end{aligned}$$

Kita memiliki $|A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ dan $|B| = \left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor = 11$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6 \text{ dan } 9\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } \operatorname{lcm}(6, 9)\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 18\}. \end{aligned}$$

Jadi $|A \cap B| =$

Latihan 3

Latihan

Ada berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100 dengan sifat habis dibagi 6 atau 9?

Solusi: Tinjau bahwa terdapat 100 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100. Misalkan

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 9\}. \end{aligned}$$

Kita memiliki $|A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ dan $|B| = \left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor = 11$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6 \text{ dan } 9\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } \operatorname{lcm}(6, 9)\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 18\}. \end{aligned}$$

Jadi $|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{18} \right\rfloor = 5$. Berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi diperoleh

$$|A \cup B| =$$

Latihan 3

Latihan

Ada berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100 dengan sifat habis dibagi 6 atau 9?

Solusi: Tinjau bahwa terdapat 100 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100. Misalkan

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 9\}. \end{aligned}$$

Kita memiliki $|A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ dan $|B| = \left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor = 11$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6 \text{ dan } 9\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } \operatorname{lcm}(6, 9)\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 18\}. \end{aligned}$$

Jadi $|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{18} \right\rfloor = 5$. Berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi diperoleh

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 11 - 5 = 22.$$

Latihan 3

Latihan

Ada berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100 dengan sifat habis dibagi 6 atau 9?

Solusi: Tinjau bahwa terdapat 100 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100. Misalkan

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 9\}. \end{aligned}$$

Kita memiliki $|A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ dan $|B| = \left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor = 11$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 6 \text{ dan } 9\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } \operatorname{lcm}(6,9)\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x \leq 100 \text{ dan } x \text{ habis dibagi } 18\}. \end{aligned}$$

Jadi $|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{18} \right\rfloor = 5$. Berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi diperoleh

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 11 - 5 = 22.$$

Jadi ada 22 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 100 dan habis dibagi 6 atau 9.

Challenging Problems

Challenging Problems

1. Tentukan banyaknya bit string dengan panjang 8 yang memenuhi kriteria berikut:
   1. bit string tersebut dimulai dengan tiga digit 0 atau diakhiri dengan dua digit 1 (contohnya 00010100, 10110111, maupun 00010111);
   2. bit string tersebut dimulai dengan tiga digit 0 atau diakhiri dengan dua digit 1, <u>tetapi tidak keduanya</u> (contohnya 00010100 maupun 10110111, namun 00010111 tidak termasuk dalam kriteria ini karena 00010111 dimulai dengan tiga digit 0 dan diakhiri dengan dua digit 1).
2. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif di antara 100 dan 200 (100 dan 200 termasuk) yang habis dibagi oleh salah satu dari bilangan-bilangan berikut: $2, 3, 5$.

Bahasan

Aturan Pembagian

Kita telah melihat aturan berhitung yang melibatkan operasi penjumlahan, perkalian, dan pengurangan. Selanjutnya kita akan meninjau aturan berhitung yang melibatkan operasi pembagian.

Aturan Pembagian (*Division Rule*)

Misalkan suatu pekerjaan dapat diselesaikan dalam n cara. Jika ternyata untuk setiap cara terdapat d penyelesaian yang hasilnya identik dan d habis membagi n, maka pekerjaan tersebut dapat diselesaikan dalam $\frac{n}{d}$ cara berbeda.

Contoh

Misalkan terdapat 4 kursi yang mengililingi sebuah meja bundar. Tentukan banyaknya cara duduk berbeda untuk 4 orang apabila dua cara duduk dianggap sama selama tetangga kiri maupun tetangga kanan dari setiap orang yang duduk tidak berubah.

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (1)

Solusi:
Pertama labeli sembarang sebuah kursi dengan 1. Kemudian labeli kursi berikutnya dengan 2, 3, dan 4 secara searah jarum jam. Misalkan orang yang akan duduk adalah k_1, k_2, k_3, k_4. Perhatikan bahwa

1. Terdapat 4 pilihan untuk k_1,

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (1)

Solusi:
Pertama labeli sembarang sebuah kursi dengan 1. Kemudian labeli kursi berikutnya dengan 2, 3, dan 4 secara searah jarum jam. Misalkan orang yang akan duduk adalah k_1, k_2, k_3, k_4. Perhatikan bahwa

1. Terdapat 4 pilihan untuk k_1,
2. terdapat 3 pilihan untuk k_2,

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (1)

Solusi:
Pertama labeli sembarang sebuah kursi dengan 1. Kemudian labeli kursi berikutnya dengan 2, 3, dan 4 secara searah jarum jam. Misalkan orang yang akan duduk adalah k_1, k_2, k_3, k_4. Perhatikan bahwa

1. Terdapat 4 pilihan untuk k_1,
2. terdapat 3 pilihan untuk k_2,
3. terdapat 2 pilihan untuk k_3, dan

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (1)

Solusi:
Pertama labeli sembarang sebuah kursi dengan 1. Kemudian labeli kursi berikutnya dengan 2, 3, dan 4 secara searah jarum jam. Misalkan orang yang akan duduk adalah k_1, k_2, k_3, k_4. Perhatikan bahwa

1. Terdapat 4 pilihan untuk k_1,
2. terdapat 3 pilihan untuk k_2,
3. terdapat 2 pilihan untuk k_3, dan
4. terdapat 1 pilihan untuk k_4.

Dengan aturan perkalian diperoleh $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ cara duduk.

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (1)

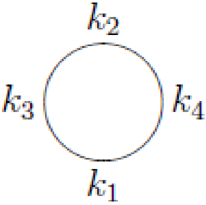
Solusi:
Pertama labeli sembarang sebuah kursi dengan 1. Kemudian labeli kursi berikutnya dengan 2, 3, dan 4 secara searah jarum jam. Misalkan orang yang akan duduk adalah k_1, k_2, k_3, k_4. Perhatikan bahwa

1. Terdapat 4 pilihan untuk k_1,
2. terdapat 3 pilihan untuk k_2,
3. terdapat 2 pilihan untuk k_3, dan
4. terdapat 1 pilihan untuk k_4.

Dengan aturan perkalian diperoleh $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ cara duduk. Pada dasarnya 24 cara duduk ini merepresentasikan susunan banyaknya cara duduk k_1, k_2, k_3, dan k_4 secara linier (dalam satu barisan yang sama, tidak melingkar).

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (2)

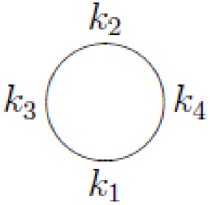
Selanjutnya katakanlah konfigurasi tempat duduk yang diperoleh adalah sebagai berikut



Tinjau bahwa semua konfigurasi berikut akan menghasilkan konfigurasi yang sama seperti pada gambar:

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (2)

Selanjutnya katakanlah konfigurasi tempat duduk yang diperoleh adalah sebagai berikut

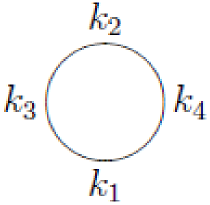


Tinjau bahwa semua konfigurasi berikut akan menghasilkan konfigurasi yang sama seperti pada gambar:

$$(k_2, k_4, k_1, k_3)\,,$$

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (2)

Selanjutnya katakanlah konfigurasi tempat duduk yang diperoleh adalah sebagai berikut

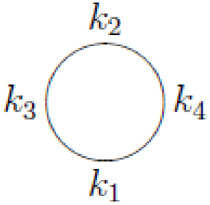


Tinjau bahwa semua konfigurasi berikut akan menghasilkan konfigurasi yang sama seperti pada gambar:

$$(k_2, k_4, k_1, k_3)\,,\;\; (k_3, k_2, k_4, k_1)\,,$$

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (2)

Selanjutnya katakanlah konfigurasi tempat duduk yang diperoleh adalah sebagai berikut

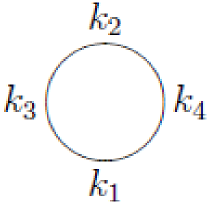


Tinjau bahwa semua konfigurasi berikut akan menghasilkan konfigurasi yang sama seperti pada gambar:

$$(k_2, k_4, k_1, k_3)\,,\ (k_3, k_2, k_4, k_1)\,,\ (k_1, k_3, k_2, k_4)\,,$$

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (2)

Selanjutnya katakanlah konfigurasi tempat duduk yang diperoleh adalah sebagai berikut



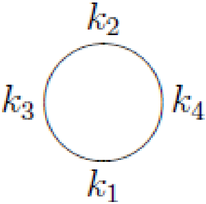
Tinjau bahwa semua konfigurasi berikut akan menghasilkan konfigurasi yang sama seperti pada gambar:

$$(k_2, k_4, k_1, k_3)\,,\ (k_3, k_2, k_4, k_1)\,,\ (k_1, k_3, k_2, k_4)\,,\ (k_4, k_1, k_3, k_2)\,.$$

Secara umum jika $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$ dan $a \neq b \neq c \neq d$, maka semua konfigurasi berikut memberikan konfigurasi tempat duduk yang sama (tetangga kanan dan kiri tidak berubah)

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (2)

Selanjutnya katakanlah konfigurasi tempat duduk yang diperoleh adalah sebagai berikut



Tinjau bahwa semua konfigurasi berikut akan menghasilkan konfigurasi yang sama seperti pada gambar:

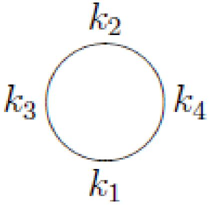
$$(k_2, k_4, k_1, k_3)\,,\ (k_3, k_2, k_4, k_1)\,,\ (k_1, k_3, k_2, k_4)\,,\ (k_4, k_1, k_3, k_2)\,.$$

Secara umum jika $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$ dan $a \neq b \neq c \neq d$, maka semua konfigurasi berikut memberikan konfigurasi tempat duduk yang sama (tetangga kanan dan kiri tidak berubah)

$$(k_a, k_b, k_c, k_d)\,,$$

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (2)

Selanjutnya katakanlah konfigurasi tempat duduk yang diperoleh adalah sebagai berikut



Tinjau bahwa semua konfigurasi berikut akan menghasilkan konfigurasi yang sama seperti pada gambar:

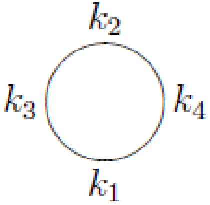
$$(k_2, k_4, k_1, k_3), \ (k_3, k_2, k_4, k_1), \ (k_1, k_3, k_2, k_4), \ (k_4, k_1, k_3, k_2).$$

Secara umum jika $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$ dan $a \neq b \neq c \neq d$, maka semua konfigurasi berikut memberikan konfigurasi tempat duduk yang sama (tetangga kanan dan kiri tidak berubah)

$$(k_a, k_b, k_c, k_d), \ (k_d, k_a, k_b, k_c),$$

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (2)

Selanjutnya katakanlah konfigurasi tempat duduk yang diperoleh adalah sebagai berikut



Tinjau bahwa semua konfigurasi berikut akan menghasilkan konfigurasi yang sama seperti pada gambar:

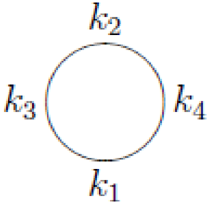
$$(k_2, k_4, k_1, k_3)\,,\ (k_3, k_2, k_4, k_1)\,,\ (k_1, k_3, k_2, k_4)\,,\ (k_4, k_1, k_3, k_2)\,.$$

Secara umum jika $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$ dan $a \neq b \neq c \neq d$, maka semua konfigurasi berikut memberikan konfigurasi tempat duduk yang sama (tetangga kanan dan kiri tidak berubah)

$$(k_a, k_b, k_c, k_d)\,,\ (k_d, k_a, k_b, k_c)\,,\ (k_c, k_d, k_a, k_b)\,,$$

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (2)

Selanjutnya katakanlah konfigurasi tempat duduk yang diperoleh adalah sebagai berikut



Tinjau bahwa semua konfigurasi berikut akan menghasilkan konfigurasi yang sama seperti pada gambar:

$$(k_2, k_4, k_1, k_3),\ (k_3, k_2, k_4, k_1),\ (k_1, k_3, k_2, k_4),\ (k_4, k_1, k_3, k_2).$$

Secara umum jika $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$ dan $a \neq b \neq c \neq d$, maka semua konfigurasi berikut memberikan konfigurasi tempat duduk yang sama (tetangga kanan dan kiri tidak berubah)

$$(k_a, k_b, k_c, k_d),\ (k_d, k_a, k_b, k_c),\ (k_c, k_d, k_a, k_b),\ (k_b, k_c, k_d, k_a).$$

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (3)

Dengan demikian menurut aturan pembagian terdapat

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (3)

Dengan demikian menurut aturan pembagian terdapat $\frac{24}{4} = 6$ cara duduk yang berbeda untuk 4 orang yang melingkari meja bundar.

Teorema (Permutasi Siklis (*Cyclic Permutation*))

Misalkan terdapat n kursi yang mengelilingi sebuah meja bundar. Dua cara duduk dianggap sama selama tetangga kiri maupun tetangga kanan dari setiap orang yang duduk tidak berubah. Akibatnya banyaknya cara duduk berbeda untuk n orang adalah

Solusi Contoh: Permutasi Siklis (3)

Dengan demikian menurut aturan pembagian terdapat $\frac{24}{4} = 6$ cara duduk yang berbeda untuk 4 orang yang melingkari meja bundar.

Teorema (Permutasi Siklis (*Cyclic Permutation*))

Misalkan terdapat n kursi yang mengelilingi sebuah meja bundar. Dua cara duduk dianggap sama selama tetangga kiri maupun tetangga kanan dari setiap orang yang duduk tidak berubah. Akibatnya banyaknya cara duduk berbeda untuk n orang adalah $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Bukti

Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Bahasan

Latihan 4

Latihan (Gunakan aturan-aturan dasar berhitung yang telah diajarkan)

1. Tentukan banyaknya susunan string dengan empat karakter yang dapat dibentuk dari kata **BUKU** dengan ketentuan setiap huruf pada kata **BUKU** hanya dapat dipakai sekali.
   (Contoh: BUKU, BKUU, BUUK, dan sebagainya).
2. Tentukan banyaknya susunan string berbeda yang dapat dibentuk dari kata **KUTUBUKU** jika setiap huruf pada kata **KUTUBUKU** harus semuanya dipakai dan hanya dapat dipakai sekali saja.
   (Contoh: KUTUBUKU, KUTUBUUK, KUUTBUUK, dan sebagainya).

Solusi Soal 1 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string empat karakter yang dapat dibentuk dari kata

Solusi Soal 1 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string empat karakter yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{B}\mathbf{U}_1\mathbf{K}\mathbf{U}_2$ (dua huruf **U** dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string empat karakter tersebut berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ dengan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{\mathbf{B}, \mathbf{U}_1, \mathbf{K}, \mathbf{U}_2\}$.

Solusi Soal 1 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string empat karakter yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{BU}_1\mathbf{KU}_2$ (dua huruf **U** dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string empat karakter tersebut berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ dengan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{\mathbf{B}, \mathbf{U}_1, \mathbf{K}, \mathbf{U}_2\}$. Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal, diperoleh:

1. banyak kemungkinan huruf untuk s_1 :

Solusi Soal 1 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string empat karakter yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{BU}_1\mathbf{KU}_2$ (dua huruf **U** dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string empat karakter tersebut berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ dengan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{\mathbf{B}, \mathbf{U}_1, \mathbf{K}, \mathbf{U}_2\}$. Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal, diperoleh:

1. banyak kemungkinan huruf untuk s_1 : 4,
2. banyak kemungkinan huruf untuk s_2 :

Solusi Soal 1 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string empat karakter yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{BU}_1\mathbf{KU}_2$ (dua huruf **U** dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string empat karakter tersebut berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ dengan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{\mathbf{B}, \mathbf{U}_1, \mathbf{K}, \mathbf{U}_2\}$. Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal, diperoleh:

1. banyak kemungkinan huruf untuk s_1 : 4,
2. banyak kemungkinan huruf untuk s_2 : 3,
3. banyak kemungkinan huruf untuk s_3 :

Solusi Soal 1 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string empat karakter yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{BU}_1\mathbf{KU}_2$ (dua huruf **U** dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string empat karakter tersebut berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ dengan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{\mathbf{B}, \mathbf{U}_1, \mathbf{K}, \mathbf{U}_2\}$. Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal, diperoleh:

1. banyak kemungkinan huruf untuk $s_1 : 4$,
2. banyak kemungkinan huruf untuk $s_2 : 3$,
3. banyak kemungkinan huruf untuk $s_3 : 2$,
4. banyak kemungkinan huruf untuk $s_4 :$

Solusi Soal 1 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string empat karakter yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{BU}_1\mathbf{KU}_2$ (dua huruf **U** dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string empat karakter tersebut berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ dengan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{\mathbf{B}, \mathbf{U}_1, \mathbf{K}, \mathbf{U}_2\}$. Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal, diperoleh:

1. banyak kemungkinan huruf untuk $s_1 : 4$,
2. banyak kemungkinan huruf untuk $s_2 : 3$,
3. banyak kemungkinan huruf untuk $s_3 : 2$,
4. banyak kemungkinan huruf untuk $s_4 : 1$.

Dengan aturan perkalian, banyak string yang mungkin dari kata $\mathbf{BU}_1\mathbf{KU}_2$ adalah

Solusi Soal 1 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string empat karakter yang dapat dibentuk dari kata **BU**$_1$**KU**$_2$ (dua huruf **U** dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string empat karakter tersebut berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ dengan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{\mathbf{B}, \mathbf{U}_1, \mathbf{K}, \mathbf{U}_2\}$. Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal, diperoleh:

1. banyak kemungkinan huruf untuk $s_1 : 4$,
2. banyak kemungkinan huruf untuk $s_2 : 3$,
3. banyak kemungkinan huruf untuk $s_3 : 2$,
4. banyak kemungkinan huruf untuk $s_4 : 1$.

Dengan aturan perkalian, banyak string yang mungkin dari kata **BU**$_1$**KU**$_2$ adalah $4!$.

Solusi Soal 1 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string empat karakter yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{BU}_1\mathbf{KU}_2$ (dua huruf **U** dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string empat karakter tersebut berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ dengan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{\mathbf{B}, \mathbf{U}_1, \mathbf{K}, \mathbf{U}_2\}$. Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal, diperoleh:

1. banyak kemungkinan huruf untuk $s_1 : 4$,
2. banyak kemungkinan huruf untuk $s_2 : 3$,
3. banyak kemungkinan huruf untuk $s_3 : 2$,
4. banyak kemungkinan huruf untuk $s_4 : 1$.

Dengan aturan perkalian, banyak string yang mungkin dari kata $\mathbf{BU}_1\mathbf{KU}_2$ adalah $4!$. Kemudian karena $\mathbf{U}_1$ dan $\mathbf{U}_2$ tidak dibedakan, maka dengan aturan pembagian banyak string berbeda adalah

Solusi Soal 1 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string empat karakter yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{BU}_1\mathbf{KU}_2$ (dua huruf **U** dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string empat karakter tersebut berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4$ dengan $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \{\mathbf{B}, \mathbf{U}_1, \mathbf{K}, \mathbf{U}_2\}$. Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal, diperoleh:

1. banyak kemungkinan huruf untuk $s_1 : 4$,
2. banyak kemungkinan huruf untuk $s_2 : 3$,
3. banyak kemungkinan huruf untuk $s_3 : 2$,
4. banyak kemungkinan huruf untuk $s_4 : 1$.

Dengan aturan perkalian, banyak string yang mungkin dari kata $\mathbf{BU}_1\mathbf{KU}_2$ adalah $4!$. Kemudian karena $\mathbf{U}_1$ dan $\mathbf{U}_2$ tidak dibedakan, maka dengan aturan pembagian banyak string berbeda adalah $\frac{4!}{2!} = 12$ string.

Solusi Soal 2 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string yang dapat dibentuk dari kata

Solusi Soal 2 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{K}_1\mathbf{U}_1\mathbf{T}\mathbf{U}_2\mathbf{B}\mathbf{U}_3\mathbf{K}_2\mathbf{U}_4$ (huruf-huruf yang sama dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string yang dihasilkan berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$ dengan $s_i \in \{\mathbf{K}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{T}, \mathbf{U}_2, \mathbf{B}, \mathbf{U}_3, \mathbf{K}_2, \mathbf{U}_4\}$ untuk setiap $i = 1, \ldots, 8$.

Solusi Soal 2 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{K}_1\mathbf{U}_1\mathbf{T}\mathbf{U}_2\mathbf{B}\mathbf{U}_3\mathbf{K}_2\mathbf{U}_4$ (huruf-huruf yang sama dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string yang dihasilkan berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$ dengan $s_i \in \{\mathbf{K}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{T}, \mathbf{U}_2, \mathbf{B}, \mathbf{U}_3, \mathbf{K}_2, \mathbf{U}_4\}$ untuk setiap $i = 1, \ldots, 8$.

Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal dan aturan perkalian, banyaknya string yang dapat dibentuk bila huruf-huruf yang sama dibedakan adalah

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!.$$

- Nomor pada huruf **K** ada 2, yaitu $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$. Akibatnya banyaknya cara pengurutan huruf **K** ada sebanyak

Solusi Soal 2 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{K}_1\mathbf{U}_1\mathbf{T}\mathbf{U}_2\mathbf{B}\mathbf{U}_3\mathbf{K}_2\mathbf{U}_4$ (huruf-huruf yang sama dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string yang dihasilkan berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$ dengan $s_i \in \{\mathbf{K}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{T}, \mathbf{U}_2, \mathbf{B}, \mathbf{U}_3, \mathbf{K}_2, \mathbf{U}_4\}$ untuk setiap $i = 1, \ldots, 8$.

Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal dan aturan perkalian, banyaknya string yang dapat dibentuk bila huruf-huruf yang sama dibedakan adalah

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!.$$

- Nomor pada huruf **K** ada 2, yaitu $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$. Akibatnya banyaknya cara pengurutan huruf **K** ada sebanyak $2!$ (yaitu $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ dan $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$)
- Nomor pada huruf **U** ada 4, yaitu $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$, dan $\mathbf{U}_4$. Akibatnya banyaknya cara pengurutan huruf **U** ada sebanyak

Solusi Soal 2 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{K}_1\mathbf{U}_1\mathbf{T}\mathbf{U}_2\mathbf{B}\mathbf{U}_3\mathbf{K}_2\mathbf{U}_4$ (huruf-huruf yang sama dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string yang dihasilkan berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$ dengan $s_i \in \{\mathbf{K}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{T}, \mathbf{U}_2, \mathbf{B}, \mathbf{U}_3, \mathbf{K}_2, \mathbf{U}_4\}$ untuk setiap $i = 1, \ldots, 8$.

Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal dan aturan perkalian, banyaknya string yang dapat dibentuk bila huruf-huruf yang sama dibedakan adalah

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!.$$

- Nomor pada huruf **K** ada 2, yaitu $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$. Akibatnya banyaknya cara pengurutan huruf **K** ada sebanyak $2!$ (yaitu $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ dan $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$)
- Nomor pada huruf **U** ada 4, yaitu $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$, dan $\mathbf{U}_4$. Akibatnya banyaknya cara pengurutan huruf **U** ada sebanyak $4!$ (yaitu $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2\mathbf{U}_3\mathbf{U}_4$, $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_3\mathbf{U}_2\mathbf{U}_4$, $\mathbf{U}_4\mathbf{U}_2\mathbf{U}_1\mathbf{U}_3$, $\mathbf{U}_2\mathbf{U}_4\mathbf{U}_3\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_3\mathbf{U}_1\mathbf{U}_4\mathbf{U}_2$, dan lain-lain).

Karena urutan huruf yang sama tidak diperhatikan, maka berdasarkan aturan pembagian nilai $8!$ harus dibagi dengan hasil kali $2!$ dan $4!$, sehingga banyaknya string yang dapat dibentuk adalah

Solusi Soal 2 Latihan 4

Untuk mempermudah, pertama akan dicari banyaknya susunan string yang dapat dibentuk dari kata $\mathbf{K}_1\mathbf{U}_1\mathbf{T}\mathbf{U}_2\mathbf{B}\mathbf{U}_3\mathbf{K}_2\mathbf{U}_4$ (huruf-huruf yang sama dibedakan terlebih dulu). Tinjau bahwa string yang dihasilkan berbentuk $s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8$ dengan $s_i \in \{\mathbf{K}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{T}, \mathbf{U}_2, \mathbf{B}, \mathbf{U}_3, \mathbf{K}_2, \mathbf{U}_4\}$ untuk setiap $i = 1, \ldots, 8$.

Dengan ketentuan yang dijelaskan pada soal dan aturan perkalian, banyaknya string yang dapat dibentuk bila huruf-huruf yang sama dibedakan adalah

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!.$$

- Nomor pada huruf **K** ada 2, yaitu $\mathbf{K}_1$ dan $\mathbf{K}_2$. Akibatnya banyaknya cara pengurutan huruf **K** ada sebanyak $2!$ (yaitu $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ dan $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$)
- Nomor pada huruf **U** ada 4, yaitu $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$, dan $\mathbf{U}_4$. Akibatnya banyaknya cara pengurutan huruf **U** ada sebanyak $4!$ (yaitu $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2\mathbf{U}_3\mathbf{U}_4$, $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_3\mathbf{U}_2\mathbf{U}_4$, $\mathbf{U}_4\mathbf{U}_2\mathbf{U}_1\mathbf{U}_3$, $\mathbf{U}_2\mathbf{U}_4\mathbf{U}_3\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_3\mathbf{U}_1\mathbf{U}_4\mathbf{U}_2$, dan lain-lain).

Karena urutan huruf yang sama tidak diperhatikan, maka berdasarkan aturan pembagian nilai $8!$ harus dibagi dengan hasil kali $2!$ dan $4!$, sehingga banyaknya string yang dapat dibentuk adalah $\frac{8!}{2!4!} = 840.$

Latihan 5

Latihan

1. Tentukan banyaknya subhimpunan dari $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang memuat tepat 3 anggota (contohnya $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, dan $\{4, 5, 6\}$).
2. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Jika $0 \leq k < n$, tentukan banyaknya subhimpunan dari A yang memuat tepat k anggota.

Solusi Soal 1 Latihan 5

Bila $B \subseteq A$ dan $|B| = 3$, kita dapat memisalkan $B =$

Solusi Soal 1 Latihan 5

Bila $B \subseteq A$ dan $|B| = 3$, kita dapat memisalkan $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Pertama, tinjau cara untuk memperoleh 3-tupel terurut (b_1, b_2, b_3) dari $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ terlebih dulu. Kita memiliki

1. banyak kemungkinan untuk b_1 ada

Solusi Soal 1 Latihan 5

Bila $B \subseteq A$ dan $|B| = 3$, kita dapat memisalkan $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Pertama, tinjau cara untuk memperoleh 3-tupel terurut (b_1, b_2, b_3) dari $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ terlebih dulu. Kita memiliki

1. banyak kemungkinan untuk b_1 ada 6,
2. karena $b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_2 ada

Solusi Soal 1 Latihan 5

Bila $B \subseteq A$ dan $|B| = 3$, kita dapat memisalkan $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Pertama, tinjau cara untuk memperoleh 3-tupel terurut (b_1, b_2, b_3) dari $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ terlebih dulu. Kita memiliki

1. banyak kemungkinan untuk b_1 ada 6,
2. karena $b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_2 ada 5,
3. karena $b_3 \neq b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_3 ada

Solusi Soal 1 Latihan 5

Bila $B \subseteq A$ dan $|B| = 3$, kita dapat memisalkan $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Pertama, tinjau cara untuk memperoleh 3-tupel terurut (b_1, b_2, b_3) dari $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ terlebih dulu. Kita memiliki

1. banyak kemungkinan untuk b_1 ada 6,
2. karena $b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_2 ada 5,
3. karena $b_3 \neq b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_3 ada 4.

Berdasarkan aturan perkalian, banyaknya kemungkinan untuk tupel terurut (b_1, b_2, b_3) adalah

Solusi Soal 1 Latihan 5

Bila $B \subseteq A$ dan $|B| = 3$, kita dapat memisalkan $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Pertama, tinjau cara untuk memperoleh 3-tupel terurut (b_1, b_2, b_3) dari $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ terlebih dulu. Kita memiliki

1. banyak kemungkinan untuk b_1 ada 6,
2. karena $b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_2 ada 5,
3. karena $b_3 \neq b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_3 ada 4.

Berdasarkan aturan perkalian, banyaknya kemungkinan untuk tupel terurut (b_1, b_2, b_3) adalah $6 \cdot 5 \cdot 4$ kemungkinan.

Karena urutan pada himpunan tidak diperhatikan, maka $\{b_1, b_2, b_3\} = \{b_1, b_3, b_2\} = \cdots = \{b_3, b_2, b_1\}$.

Karena urutan pada himpunan tidak diperhatikan, maka $\{b_1, b_2, b_3\} = \{b_1, b_3, b_2\} = \cdots = \{b_3, b_2, b_1\}$. Akibatnya hasil $6 \cdot 5 \cdot 4$ harus dibagi dengan banyaknya cara pengurutan untuk b_1, b_2, dan b_3. Cara pengurutan b_1, b_2, dan b_3 dapat dilakukan berikut:

1. urutan pertama dapat ditempati oleh

Karena urutan pada himpunan tidak diperhatikan, maka $\{b_1, b_2, b_3\} = \{b_1, b_3, b_2\} = \cdots = \{b_3, b_2, b_1\}$. Akibatnya hasil $6 \cdot 5 \cdot 4$ harus dibagi dengan banyaknya cara pengurutan untuk b_1, b_2, dan b_3. Cara pengurutan b_1, b_2, dan b_3 dapat dilakukan berikut:

1. urutan pertama dapat ditempati oleh 3 pilihan (salah satu dari b_1, b_2, atau b_3),
2. urutan kedua dapat ditempati oleh

Karena urutan pada himpunan tidak diperhatikan, maka $\{b_1, b_2, b_3\} = \{b_1, b_3, b_2\} = \cdots = \{b_3, b_2, b_1\}$. Akibatnya hasil $6 \cdot 5 \cdot 4$ harus dibagi dengan banyaknya cara pengurutan untuk b_1, b_2, dan b_3. Cara pengurutan b_1, b_2, dan b_3 dapat dilakukan berikut:

1. urutan pertama dapat ditempati oleh 3 pilihan (salah satu dari b_1, b_2, atau b_3),
2. urutan kedua dapat ditempati oleh 2 pilihan,
3. urutan ketiga dapat ditempati oleh

Karena urutan pada himpunan tidak diperhatikan, maka $\{b_1, b_2, b_3\} = \{b_1, b_3, b_2\} = \cdots = \{b_3, b_2, b_1\}$. Akibatnya hasil $6 \cdot 5 \cdot 4$ harus dibagi dengan banyaknya cara pengurutan untuk b_1, b_2, dan b_3. Cara pengurutan b_1, b_2, dan b_3 dapat dilakukan berikut:

1. urutan pertama dapat ditempati oleh 3 pilihan (salah satu dari b_1, b_2, atau b_3),
2. urutan kedua dapat ditempati oleh 2 pilihan,
3. urutan ketiga dapat ditempati oleh 1 pilihan.

Akibatnya terdapat

Karena urutan pada himpunan tidak diperhatikan, maka $\{b_1, b_2, b_3\} = \{b_1, b_3, b_2\} = \cdots = \{b_3, b_2, b_1\}$. Akibatnya hasil $6 \cdot 5 \cdot 4$ harus dibagi dengan banyaknya cara pengurutan untuk b_1, b_2, dan b_3. Cara pengurutan b_1, b_2, dan b_3 dapat dilakukan berikut:

1. urutan pertama dapat ditempati oleh 3 pilihan (salah satu dari b_1, b_2, atau b_3),
2. urutan kedua dapat ditempati oleh 2 pilihan,
3. urutan ketiga dapat ditempati oleh 1 pilihan.

Akibatnya terdapat $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ cara pengurutan yang berbeda untuk b_1, b_2, dan b_3. Berdasarkan aturan pembagian, banyaknya himpunan $\{b_1, b_2, b_3\} \subseteq A$ yang berbeda adalah

Karena urutan pada himpunan tidak diperhatikan, maka $\{b_1, b_2, b_3\} = \{b_1, b_3, b_2\} = \cdots = \{b_3, b_2, b_1\}$. Akibatnya hasil $6 \cdot 5 \cdot 4$ harus dibagi dengan banyaknya cara pengurutan untuk b_1, b_2, dan b_3. Cara pengurutan b_1, b_2, dan b_3 dapat dilakukan berikut:

1. urutan pertama dapat ditempati oleh 3 pilihan (salah satu dari b_1, b_2, atau b_3),
2. urutan kedua dapat ditempati oleh 2 pilihan,
3. urutan ketiga dapat ditempati oleh 1 pilihan.

Akibatnya terdapat $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ cara pengurutan yang berbeda untuk b_1, b_2, dan b_3. Berdasarkan aturan pembagian, banyaknya himpunan $\{b_1, b_2, b_3\} \subseteq A$ yang berbeda adalah $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$ himpunan.

Solusi Soal 2 Latihan 5

Apabila $B \subseteq A$ dan $|B| = k \leq n$, kita dapat memisalkan B sebagai berikut

$$B =$$

Solusi Soal 2 Latihan 5

Apabila $B \subseteq A$ dan $|B| = k \leq n$, kita dapat memisalkan B sebagai berikut

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$$

Pertama tinjau cara untuk memperoleh k-tupel terurut $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ terlebih dulu. Kita memiliki

- banyak kemungkinan untuk b_1 ada

Solusi Soal 2 Latihan 5

Apabila $B \subseteq A$ dan $|B| = k \leq n$, kita dapat memisalkan B sebagai berikut

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$$

Pertama tinjau cara untuk memperoleh k-tupel terurut $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ terlebih dulu. Kita memiliki

- banyak kemungkinan untuk b_1 ada n,
- karena $b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_2 ada

Solusi Soal 2 Latihan 5

Apabila $B \subseteq A$ dan $|B| = k \leq n$, kita dapat memisalkan B sebagai berikut

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$$

Pertama tinjau cara untuk memperoleh k-tupel terurut $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ terlebih dulu. Kita memiliki

- banyak kemungkinan untuk b_1 ada n,
- karena $b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_2 ada $n - 1$,
- karena $b_3 \neq b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_3 ada

Solusi Soal 2 Latihan 5

Apabila $B \subseteq A$ dan $|B| = k \leq n$, kita dapat memisalkan B sebagai berikut

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$$

Pertama tinjau cara untuk memperoleh k-tupel terurut $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ terlebih dulu. Kita memiliki

- banyak kemungkinan untuk b_1 ada n,
- karena $b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_2 ada $n - 1$,
- karena $b_3 \neq b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_3 ada $n - 2$,
- $\vdots$
- karena $b_k \neq b_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k - 1$, banyak kemungkinan untuk b_k ada

Solusi Soal 2 Latihan 5

Apabila $B \subseteq A$ dan $|B| = k \leq n$, kita dapat memisalkan B sebagai berikut

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$$

Pertama tinjau cara untuk memperoleh k-tupel terurut $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ terlebih dulu. Kita memiliki

- banyak kemungkinan untuk b_1 ada n,
- karena $b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_2 ada $n-1$,
- karena $b_3 \neq b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_3 ada $n-2$,
- $\vdots$
- karena $b_k \neq b_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k-1$, banyak kemungkinan untuk b_k ada $n-k+1$.

Berdasarkan aturan perkalian, banyaknya kemungkinan untuk tupel terurut $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ adalah

$$(n)(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1) =$$

Solusi Soal 2 Latihan 5

Apabila $B \subseteq A$ dan $|B| = k \leq n$, kita dapat memisalkan B sebagai berikut

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$$

Pertama tinjau cara untuk memperoleh k-tupel terurut $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ terlebih dulu. Kita memiliki

- banyak kemungkinan untuk b_1 ada n,
- karena $b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_2 ada $n-1$,
- karena $b_3 \neq b_2 \neq b_1$, banyak kemungkinan untuk b_3 ada $n-2$,
- $\vdots$
- karena $b_k \neq b_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k-1$, banyak kemungkinan untuk b_k ada $n-k+1$.

Berdasarkan aturan perkalian, banyaknya kemungkinan untuk tupel terurut $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ adalah

$$(n)(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1) = P(n,k).$$

Ingat kembali bahwa pada suatu himpunan urutan tidak diperhatikan, karena $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} = \cdots = \{b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1\}$. Perhatikan bahwa terdapat $k!$ cara untuk mengurutkan $b_1, b_2, \ldots, b_k$, yaitu

- urutan pertama dapat ditempati oleh

Ingat kembali bahwa pada suatu himpunan urutan tidak diperhatikan, karena $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} = \cdots = \{b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1\}$. Perhatikan bahwa terdapat $k!$ cara untuk mengurutkan $b_1, b_2, \ldots, b_k$, yaitu

- urutan pertama dapat ditempati oleh k pilihan (yaitu salah satu b_1, b_2, $\ldots$, atau b_k),
- urutan kedua dapat ditempati oleh

Ingat kembali bahwa pada suatu himpunan urutan tidak diperhatikan, karena $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} = \cdots = \{b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1\}$. Perhatikan bahwa terdapat $k!$ cara untuk mengurutkan $b_1, b_2, \ldots, b_k$, yaitu

- urutan pertama dapat ditempati oleh k pilihan (yaitu salah satu b_1, b_2, $\ldots$, atau b_k),
- urutan kedua dapat ditempati oleh $k-1$ pilihan
- $\vdots$
- urutan ke-k dapat ditempati oleh

Ingat kembali bahwa pada suatu himpunan urutan tidak diperhatikan, karena $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} = \cdots = \{b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1\}$. Perhatikan bahwa terdapat $k!$ cara untuk mengurutkan $b_1, b_2, \ldots, b_k$, yaitu

- urutan pertama dapat ditempati oleh k pilihan (yaitu salah satu b_1, b_2, ..., atau b_k),
- urutan kedua dapat ditempati oleh $k-1$ pilihan
- $\vdots$
- urutan ke-k dapat ditempati oleh 1 pilihan.

Berdasarkan aturan pembagian, banyaknya himpunan $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ yang berbeda adalah

$$\frac{P(n,k)}{k!} =$$

Ingat kembali bahwa pada suatu himpunan urutan tidak diperhatikan, karena $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} = \cdots = \{b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1\}$. Perhatikan bahwa terdapat $k!$ cara untuk mengurutkan $b_1, b_2, \ldots, b_k$, yaitu

- urutan pertama dapat ditempati oleh k pilihan (yaitu salah satu b_1, b_2, ..., atau b_k),
- urutan kedua dapat ditempati oleh $k-1$ pilihan
- $\vdots$
- urutan ke-k dapat ditempati oleh 1 pilihan.

Berdasarkan aturan pembagian, banyaknya himpunan $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ yang berbeda adalah

$$\frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Bentuk terakhir kita kenal dengan nama kombinasi dan dinotasikan dengan $C(n,k)$ atau C_k^n atau ${}_nC_k$ atau ${}^nC_k$ atau $C_{n,k}$ atau $\binom{n}{k}$.

Ingat kembali bahwa pada suatu himpunan urutan tidak diperhatikan, karena $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\} = \cdots = \{b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1\}$. Perhatikan bahwa terdapat $k!$ cara untuk mengurutkan $b_1, b_2, \ldots, b_k$, yaitu

- urutan pertama dapat ditempati oleh k pilihan (yaitu salah satu b_1, b_2, ..., atau b_k),
- urutan kedua dapat ditempati oleh $k-1$ pilihan
- $\vdots$
- urutan ke-k dapat ditempati oleh 1 pilihan.

Berdasarkan aturan pembagian, banyaknya himpunan $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ yang berbeda adalah

$$\frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Bentuk terakhir kita kenal dengan nama kombinasi dan dinotasikan dengan $C(n,k)$ atau C_k^n atau ${}_nC_k$ atau ${}^nC_k$ atau $C_{n,k}$ atau $\binom{n}{k}$. Ini berarti banyaknya cara memilih k unsur dari n unsur $(n \geq k)$ tanpa memperhatikan urutan pada k unsur yang diambil tersebut.

Bahasan

Diagram Pohon

Diagram pohon dapat digunakan untuk memecahkan masalah kombinatorika. Setiap cabang menyatakan satu pilihan yang mungkin dan setiap jalur dari akar (akar adalah simpul terkanan atau teratas) menyatakan solusi yang mungkin.

Latihan

Ada berapa banyak string biner dengan panjang 4 yang tidak memuat dua digit 1 secara berurutan?

Diagram Pohon

Diagram pohon dapat digunakan untuk memecahkan masalah kombinatorika. Setiap cabang menyatakan satu pilihan yang mungkin dan setiap jalur dari akar (akar adalah simpul terkanan atau teratas) menyatakan solusi yang mungkin.

Latihan

Ada berapa banyak string biner dengan panjang 4 yang tidak memuat dua digit 1 secara berurutan? Jawaban: 8 string.

Diagram Pohon

Diagram pohon dapat digunakan untuk memecahkan masalah kombinatorika. Setiap cabang menyatakan satu pilihan yang mungkin dan setiap jalur dari akar (akar adalah simpul terkanan atau teratas) menyatakan solusi yang mungkin.

Latihan

Ada berapa banyak string biner dengan panjang 4 yang tidak memuat dua digit 1 secara berurutan? Jawaban: 8 string.