# Relasi Rekurensi Sederhana dan Solusinya

## Kuliah Matematika Diskret Semester Genap 2022-2023

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

Maret 2023

# Acknowledgements

*Slide* ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

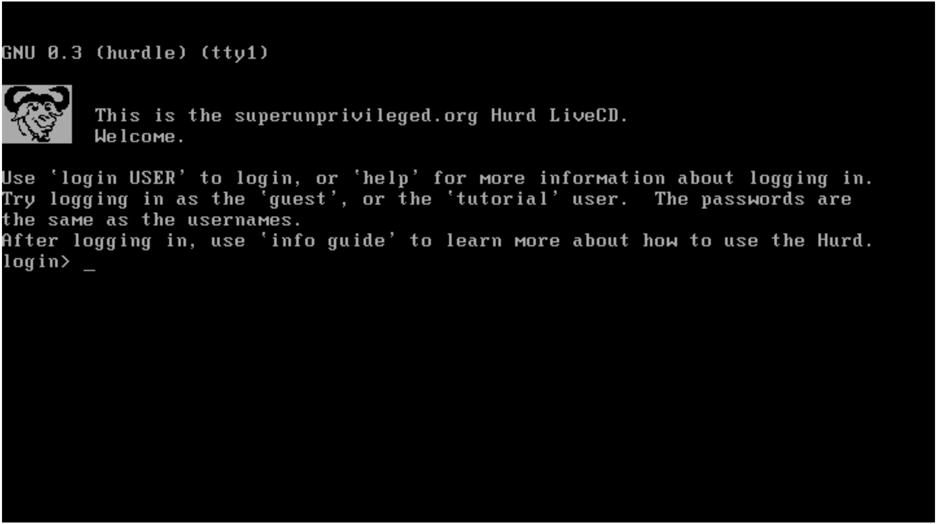
1. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications* , Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Mathematics for Computer Science*. MIT, 2010, oleh E. Lehman, F. T. Leighton, A. R. Meyer.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 2 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
5. *Slide* kuliah Matematika Diskrit di Telkom University oleh B. Purnama.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

# Bahasan

# Bahasan

Struktur rekursif merupakan struktur natural dalam *computer science*.
**GNU: GNU's not Unix**




*Gambar diambil dari Wikipedia.*

# Mengapa Diperlukan Relasi Rekurensi?

Dalam *computer science* maupun kehidupan sehari-hari, banyak masalah kalkulasi yang didefinisikan secara *rekursif*. Suatu ekpresi matematika didefinisikan secara rekursif bila definisinya mengacu pada dirinya sendiri. Masalah rekursif dapat dimodelkan sebagai suatu relasi rekurensi.

## Contoh

Tentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka $0$ atau $1$) dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang $1$ yang memenuhi syarat:

# Mengapa Diperlukan Relasi Rekurensi?

Dalam *computer science* maupun kehidupan sehari-hari, banyak masalah kalkulasi yang didefinisikan secara *rekursif*. Suatu ekpresi matematika didefinisikan secara rekursif bila definisinya mengacu pada dirinya sendiri. Masalah rekursif dapat dimodelkan sebagai suatu relasi rekurensi.

## Contoh

Tentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka $0$ atau $1$) dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang $1$ yang memenuhi syarat: $0$ dan $1$
- String biner dengan panjang $2$ yang memenuhi syarat:

# Mengapa Diperlukan Relasi Rekurensi?

Dalam *computer science* maupun kehidupan sehari-hari, banyak masalah kalkulasi yang didefinisikan secara *rekursif*. Suatu ekpresi matematika didefinisikan secara rekursif bila definisinya mengacu pada dirinya sendiri. Masalah rekursif dapat dimodelkan sebagai suatu relasi rekurensi.

## Contoh

Tentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka $0$ atau $1$) dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang $1$ yang memenuhi syarat: $0$ dan $1$
- String biner dengan panjang $2$ yang memenuhi syarat: $01$, $10$, dan $11$.
- String biner dengan panjang $3$ yang memenuhi syarat:

# Mengapa Diperlukan Relasi Rekurensi?

Dalam *computer science* maupun kehidupan sehari-hari, banyak masalah kalkulasi yang didefinisikan secara *rekursif*. Suatu ekpresi matematika didefinisikan secara rekursif bila definisinya mengacu pada dirinya sendiri. Masalah rekursif dapat dimodelkan sebagai suatu relasi rekurensi.

## Contoh

Tentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka $0$ atau $1$) dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang $1$ yang memenuhi syarat: $0$ dan $1$
- String biner dengan panjang $2$ yang memenuhi syarat: $01$, $10$, dan $11$.
- String biner dengan panjang $3$ yang memenuhi syarat: $010$, $011$, $101$, $110$, dan $111$.

Berapa banyak string biner dengan panjang $n$ yang memenuhi syarat tersebut?

## Contoh

Dalam suatu sistem suatu pesan selalu berukuran $n$ kB dengan $n$ adalah bilangan bulat non negatif. Pesan dikirim menggunakan sebuah array yang panjangnya didefinisikan sebagai berikut:

- jika ukuran pesan $0$ kB, maka array yang diperlukan memiliki panjang $1$,
- jika ukuran pesan $1$ kB, maka array yang diperlukan memiliki panjang $2$,
- jika ukuran pesan $n$ kB dengan $n > 1$, maka panjang array yang diperlukan adalah panjang array untuk pesan $n - 1$ kB ditambah panjang array untuk pesan $n - 2$ kB.

Tentukan formulasi matematis untuk menentukan panjang array yang diperlukan dalam pengiriman pesan $n$ kB.

## Contoh

Seseorang mendepositokan uangnya di bank dengan bunga $7\%$ pertahun. Jika selama $20$ tahun bunga deposito tidak pernah berubah dan uang yang ada di tabungan tersebut tidak pernah diambil, tentukan rasio peningkatan aset (jumlah uang akhir/ jumlah uang awal) dari deposito tersebut.

# Bahasan

# Beberapa Definisi Penting

## Definisi (Relasi Rekurensi)

Relasi rekurensi (*recurrence relation*) untuk sebuah barisan $(x_n)$ adalah suatu persamaan (rumus atau formula) yang menyatakan hubungan suku $x_n$ dengan satu atau lebih suku pendahulunya (yaitu $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$) dalam barisan itu untuk setiap $n \geq n_0$, untuk suatu $n_0 \geq 1$.

## Definisi (Solusi Relasi Rekurensi)

Suatu barisan $(x_n)$ disebut sebagai suatu solusi dari suatu relasi rekurensi jika semua suku pada barisan tersebut memenuhi relasi rekurensi yang ditinjau.

## Definisi (Syarat Awal Relasi Rekurensi)

Suku (atau suku-suku) pendahulu dari suku $x_n$ pada suatu relasi rekurensi, yaitu suku (atau suku-suku) $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, disebut sebagai syarat awal (*initial condition*) dari relasi rekurensi tersebut.

## Contoh

Misalkan $(x_n)$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{1}$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari $x_2$ dan $x_5$.

Perhatikan bahwa:

## Contoh

Misalkan $(x_n)$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{1}$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari $x_2$ dan $x_5$.

Perhatikan bahwa:

1. Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan $(x_n)$.

## Contoh

Misalkan $(x_n)$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{1}$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari $x_2$ dan $x_5$.

Perhatikan bahwa:

1. Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan $(x_n)$.
2. $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
3. Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 =$

## Contoh

Misalkan $(x_n)$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{1}$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari $x_2$ dan $x_5$.

Perhatikan bahwa:

1. Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan $(x_n)$.
2. $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
3. Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 =$

## Contoh

Misalkan $(x_n)$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{1}$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari $x_2$ dan $x_5$.

Perhatikan bahwa:

1. Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan $(x_n)$.
2. $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
3. Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
4. $x_5$ dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan $x_0$ dan $x_1$ sebagai berikut:

$$x_5 =$$

## Contoh

Misalkan $(x_n)$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{1}$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari $x_2$ dan $x_5$.

Perhatikan bahwa:

1. Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan $(x_n)$.
2. $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
3. Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
4. $x_5$ dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan $x_0$ dan $x_1$ sebagai berikut:

$$x_5 = x_4 - x_3 =$$

## Contoh

Misalkan $(x_n)$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{1}$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari $x_2$ dan $x_5$.

Perhatikan bahwa:

1. Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan $(x_n)$.
2. $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
3. Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
4. $x_5$ dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan $x_0$ dan $x_1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - x_3 = (x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \\ &= \end{aligned}$$

## Contoh

Misalkan $(x_n)$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{1}$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari $x_2$ dan $x_5$.

Perhatikan bahwa:

1. Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan $(x_n)$.
2. $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
3. Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
4. $x_5$ dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan $x_0$ dan $x_1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - x_3 = (x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \\ &= x_3 - 2x_2 + x_1 = \end{aligned}$$

## Contoh

Misalkan $(x_n)$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{1}$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari $x_2$ dan $x_5$.

Perhatikan bahwa:

1. Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan $(x_n)$.
2. $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
3. Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
4. $x_5$ dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan $x_0$ dan $x_1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - x_3 = (x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \\ &= x_3 - 2x_2 + x_1 = (x_2 - x_1) - 2x_2 + x_1 \\ &= \end{aligned}$$

## Contoh

Misalkan $(x_n)$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{1}$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari $x_2$ dan $x_5$.

Perhatikan bahwa:

1. Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan $(x_n)$.
2. $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
3. Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
4. $x_5$ dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan $x_0$ dan $x_1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - x_3 = (x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \\ &= x_3 - 2x_2 + x_1 = (x_2 - x_1) - 2x_2 + x_1 \\ &= -x_2 = \end{aligned}$$

## Contoh

Misalkan $(x_n)$ adalah suatu barisan yang memenuhi relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{1}$$

dengan $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$. Tentukan nilai dari $x_2$ dan $x_5$.

Perhatikan bahwa:

1. Persamaan (1) menyatakan suatu relasi rekurensi dari barisan $(x_n)$.
2. $x_0 = 3$ dan $x_1 = 5$ merupakan syarat awal dari relasi rekurensi tersebut.
3. Dari persamaan (1) diperoleh $x_2 = x_1 - x_0 = 5 - 3 = 2$.
4. $x_5$ dapat dinyatakan dengan hanya menggunakan $x_0$ dan $x_1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - x_3 = (x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) \\ &= x_3 - 2x_2 + x_1 = (x_2 - x_1) - 2x_2 + x_1 \\ &= -x_2 = -(x_1 - x_0) = -2. \end{aligned}$$

# Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

## Contoh

Periksa apakah barisan $(x_n)$ berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{2}$$

bila

1. $x_n = 3n$
2. $x_n = 2^n$
3. $x_n = 5.$

Solusi:

1. Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} =$

# Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

## Contoh

Periksa apakah barisan $(x_n)$ berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \quad (2)$$

bila

1. $x_n = 3n$
2. $x_n = 2^n$
3. $x_n = 5.$

Solusi:

1. Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} = 3\,(n-1)$ dan $x_{n-2} =$

# Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

## Contoh

Periksa apakah barisan $(x_n)$ berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{2}$$

bila

1. $x_n = 3n$
2. $x_n = 2^n$
3. $x_n = 5.$

Solusi:

1. Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} = 3(n-1)$ dan $x_{n-2} = 3(n-2)$. Tinjau bahwa

$$2x_{n-1} - x_{n-2} \quad =$$

# Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

## Contoh

Periksa apakah barisan $(x_n)$ berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{2}$$

bila

1. $x_n = 3n$
2. $x_n = 2^n$
3. $x_n = 5.$

Solusi:

1. Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} = 3(n-1)$ dan $x_{n-2} = 3(n-2)$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 3(n-1) - 3(n-2) \\ &= \end{aligned}$$

# Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

## Contoh

Periksa apakah barisan $(x_n)$ berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{2}$$

bila

1. $x_n = 3n$
2. $x_n = 2^n$
3. $x_n = 5.$

Solusi:

1. Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} = 3(n-1)$ dan $x_{n-2} = 3(n-2)$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 3(n-1) - 3(n-2) \\ &= 3n = x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) terpenuhi.

# Memeriksa Solusi Relasi Rekurensi

## Contoh

Periksa apakah barisan $(x_n)$ berikut merupakan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, \text{ untuk } n \geq 2, \tag{2}$$

bila

1. $x_n = 3n$
2. $x_n = 2^n$
3. $x_n = 5.$

Solusi:

1. Bila $x_n = 3n$, maka $x_{n-1} = 3(n-1)$ dan $x_{n-2} = 3(n-2)$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 3(n-1) - 3(n-2) \\ &= 3n = x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) terpenuhi. Akibatnya barisan $(x_n) = (3n)$ adalah sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

2. Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} =$

2. Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} =$

2. Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$2x_{n-1} - x_{n-2} =$$

2. Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$2x_{n-1} - x_{n-2} \quad = \quad 2\left(2^{n-1}\right) - 2^{n-2} =$$

2. Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2\left(2^{n-1}\right) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) tidak terpenuhi.

2. Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2\left(2^{n-1}\right) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) tidak terpenuhi. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

3. Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} =$

2. Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2\left(2^{n-1}\right) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) tidak terpenuhi. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

3. Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} = 5$ dan $x_{n-2} =$

2. Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2\left(2^{n-1}\right) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) tidak terpenuhi. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

3. Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} = 5$ dan $x_{n-2} = 5$. Tinjau bahwa

$$2x_{n-1} - x_{n-2} =$$

2. Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2\left(2^{n-1}\right) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) tidak terpenuhi. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

3. Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} = 5$ dan $x_{n-2} = 5$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 5 - 5 \\ &= \end{aligned}$$

2. Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2\left(2^{n-1}\right) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) tidak terpenuhi. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

3. Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} = 5$ dan $x_{n-2} = 5$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 5 - 5 \\ &= 5 = x_n, \end{aligned}$$

dengan perkataan lain persamaan (2) terpenuhi.

2. Bila $x_n = 2^n$ maka $x_{n-1} = 2^{n-1}$ dan $x_{n-2} = 2^{n-2}$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2\left(2^{n-1}\right) - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2} \\ &\neq x_n, \end{aligned}$$

   dengan perkataan lain persamaan (2) tidak terpenuhi. Akibatnya barisan $(x_n) = (2^n)$ bukan sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

3. Bila $x_n = 5$, maka $x_{n-1} = 5$ dan $x_{n-2} = 5$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} 2x_{n-1} - x_{n-2} &= 2 \cdot 5 - 5 \\ &= 5 = x_n, \end{aligned}$$

   dengan perkataan lain persamaan (2) terpenuhi. Akibatnya barisan $(x_n) = (5)$ adalah sebuah solusi dari relasi rekurensi (2).

### Permasalahan

Mengapa solusi dari relasi rekurensi (2) tidak tunggal (ada lebih dari satu)?

# Bahasan

# Masalah Investasi

## Permasalahan

Seseorang mendepositokan uangnya di bank dengan bunga $7\%$ pertahun. Jika selama $20$ tahun bunga deposito tidak pernah berubah dan uang yang ada di tabungan tersebut tidak pernah diambil, tentukan rasio peningkatan aset (jumlah uang akhir/ jumlah uang awal) dari deposito tersebut.

Solusi: misalkan jumlah uang nasabah mula-mula adalah $x_0$ dan jumlah uang setelah $n$ tahun adalah $x_n$. Dengan demikian terdapat barisan $x_n$ yang memenuhi relasi rekurensi berikut

$$x_n =$$

# Masalah Investasi

## Permasalahan

Seseorang mendepositokan uangnya di bank dengan bunga $7\%$ pertahun. Jika selama $20$ tahun bunga deposito tidak pernah berubah dan uang yang ada di tabungan tersebut tidak pernah diambil, tentukan rasio peningkatan aset (jumlah uang akhir/ jumlah uang awal) dari deposito tersebut.

Solusi: misalkan jumlah uang nasabah mula-mula adalah $x_0$ dan jumlah uang setelah $n$ tahun adalah $x_n$. Dengan demikian terdapat barisan $x_n$ yang memenuhi relasi rekurensi berikut

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 0.07x_{n-1}, \text{ untuk } n \geq 1, \text{ yang setara dengan} \\ x_n &= \end{aligned}$$

# Masalah Investasi

## Permasalahan

Seseorang mendepositokan uangnya di bank dengan bunga $7\%$ pertahun. Jika selama $20$ tahun bunga deposito tidak pernah berubah dan uang yang ada di tabungan tersebut tidak pernah diambil, tentukan rasio peningkatan aset (jumlah uang akhir/ jumlah uang awal) dari deposito tersebut.

Solusi: misalkan jumlah uang nasabah mula-mula adalah $x_0$ dan jumlah uang setelah $n$ tahun adalah $x_n$. Dengan demikian terdapat barisan $x_n$ yang memenuhi relasi rekurensi berikut

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 0.07x_{n-1}, \text{ untuk } n \geq 1, \text{ yang setara dengan} \\ x_n &= 1.07x_{n-1} \end{aligned} \tag{3}$$

Oleh karena itu

$$x_1 \quad =$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.07x_0 \\ x_2 &= \end{aligned}$$

Oleh karena itu

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1.07x_0 \\
x_2 &= 1.07x_1 = (1.07)^2 x_0 \\
x_3 &=
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.07x_0 \\ x_2 &= 1.07x_1 = (1.07)^2 x_0 \\ x_3 &= 1.07x_2 = (1.07)^3 x_0 \\ &\vdots \\ x_n &= \end{aligned}$$

Oleh karena itu

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1.07x_0 \\
x_2 &= 1.07x_1 = (1.07)^2 x_0 \\
x_3 &= 1.07x_2 = (1.07)^3 x_0 \\
&\vdots \\
x_n &= 1.07x_{n-1} = (1.07)^n x_0,
\end{aligned}
$$

untuk $n = 20$, diperoleh $x_{20} =$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.07x_0 \\ x_2 &= 1.07x_1 = (1.07)^2\, x_0 \\ x_3 &= 1.07x_2 = (1.07)^3\, x_0 \\ &\vdots \\ x_n &= 1.07x_{n-1} = (1.07)^n\, x_0, \end{aligned}$$

untuk $n = 20$, diperoleh $x_{20} = (1.07)^{20}\, x_0$, sehingga rasio peningkatakan aset dari deposito tersebut adalah

Oleh karena itu

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1.07x_0 \\
x_2 &= 1.07x_1 = (1.07)^2\, x_0 \\
x_3 &= 1.07x_2 = (1.07)^3\, x_0 \\
&\vdots \\
x_n &= 1.07x_{n-1} = (1.07)^n\, x_0,
\end{aligned}
$$

untuk $n = 20$, diperoleh $x_{20} = (1.07)^{20}\, x_0$, sehingga rasio peningkatakan aset dari deposito tersebut adalah $\frac{x_{20}}{x_0} = (1.07)^{20}$.

# Masalah Panjang Array

## Permasalahan

Dalam suatu sistem suatu pesan selalu berukuran $n$ kB dengan $n$ adalah bilangan bulat non negatif. Pesan dikirim menggunakan sebuah array yang panjangnya didefinisikan sebagai berikut:

- jika ukuran pesan $0$ kB, maka array yang diperlukan memiliki panjang $1$.
- jika ukuran pesan $1$ kB, maka array yang diperlukan memiliki panjang $2$.
- jika ukuran pesan $n$ kB dengan $n > 1$, maka panjang array yang diperlukan adalah panjang array untuk pesan $n-1$ kB ditambah panjang array untuk pesan $n-2$ kB.

Tentukan formulasi matematis untuk menentukan panjang array yang diperlukan dalam pengiriman pesan $n$ kB. Kemudian dari formulasi yang diperoleh, tentukan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan sebesar $6$ kB.

Solusi: misalkan $L_n$ menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran $n$ kB, maka kita memiliki:

$$L_0 =$$

Solusi: misalkan $L_n$ menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran $n$ kB, maka kita memiliki:

$$L_0 = 1,\ L_1 =$$

Solusi: misalkan $L_n$ menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran $n$ kB, maka kita memiliki:

$L_0 = 1$, $L_1 = 2$, dan $L_n =$

Solusi: misalkan $L_n$ menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran $n$ kB, maka kita memiliki:

$L_0 = 1$, $L_1 = 2$, dan $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ untuk $n \geq 2$.

Akibatnya kita memiliki

$$L_2 =$$

Solusi: misalkan $L_n$ menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran $n$ kB, maka kita memiliki:

$L_0 = 1$, $L_1 = 2$, dan $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ untuk $n \geq 2$.

Akibatnya kita memiliki

$$\begin{aligned} L_2 &= L_1 + L_0 = 2 + 1 = 3 \\ L_3 &= \end{aligned}$$

Solusi: misalkan $L_n$ menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran $n$ kB, maka kita memiliki:

$$L_0 = 1,\ L_1 = 2, \text{ dan } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ untuk } n \geq 2.$$

Akibatnya kita memiliki

$$\begin{aligned} L_2 &= L_1 + L_0 = 2 + 1 = 3 \\ L_3 &= L_2 + L_1 = 3 + 2 = 5 \\ L_4 &= \end{aligned}$$

Solusi: misalkan $L_n$ menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran $n$ kB, maka kita memiliki:

$L_0 = 1$, $L_1 = 2$, dan $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ untuk $n \geq 2$.

Akibatnya kita memiliki

$$\begin{aligned}
L_2 &= L_1 + L_0 = 2 + 1 = 3 \\
L_3 &= L_2 + L_1 = 3 + 2 = 5 \\
L_4 &= L_3 + L_2 = 5 + 3 = 8 \\
L_5 &=
\end{aligned}$$

Solusi: misalkan $L_n$ menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran $n$ kB, maka kita memiliki:

$L_0 = 1$, $L_1 = 2$, dan $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ untuk $n \geq 2$.

Akibatnya kita memiliki

$$\begin{aligned}
L_2 &= L_1 + L_0 = 2 + 1 = 3 \\
L_3 &= L_2 + L_1 = 3 + 2 = 5 \\
L_4 &= L_3 + L_2 = 5 + 3 = 8 \\
L_5 &= L_4 + L_3 = 8 + 5 = 13 \\
L_6 &=
\end{aligned}$$

Solusi: misalkan $L_n$ menyatakan panjang array yang diperlukan untuk mengirimkan pesan yang berukuran $n$ kB, maka kita memiliki:

$L_0 = 1$, $L_1 = 2$, dan $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ untuk $n \geq 2$.

Akibatnya kita memiliki

$$\begin{aligned}
L_2 &= L_1 + L_0 = 2 + 1 = 3 \\
L_3 &= L_2 + L_1 = 3 + 2 = 5 \\
L_4 &= L_3 + L_2 = 5 + 3 = 8 \\
L_5 &= L_4 + L_3 = 8 + 5 = 13 \\
L_6 &= L_5 + L_4 = 13 + 8 = 21.
\end{aligned}$$

Jadi diperlukan array sepanjang $21$ untuk mengirimkan pesan sebesar $6$ kB.

**Permasalahan**

Apakah terdapat suatu formulasi eksplisit untuk menentukan $L_n$?

# Masalah String Biner

## Contoh

Buatlah sebuah formulasi rekursif untuk menentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka $0$ atau $1$) dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan. Dari formulasi yang diperoleh, carilah banyaknya string biner dengan panjang $5$ yang memenuhi syarat tersebut.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang $1$ yang memenuhi syarat:

# Masalah String Biner

## Contoh

Buatlah sebuah formulasi rekursif untuk menentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka $0$ atau $1$) dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan. Dari formulasi yang diperoleh, carilah banyaknya string biner dengan panjang $5$ yang memenuhi syarat tersebut.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang $1$ yang memenuhi syarat: $0$ dan $1$
- String biner dengan panjang $2$ yang memenuhi syarat:

# Masalah String Biner

## Contoh

Buatlah sebuah formulasi rekursif untuk menentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka $0$ atau $1$) dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan. Dari formulasi yang diperoleh, carilah banyaknya string biner dengan panjang $5$ yang memenuhi syarat tersebut.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang $1$ yang memenuhi syarat: $0$ dan $1$
- String biner dengan panjang $2$ yang memenuhi syarat: $01$, $10$, dan $11$.
- String biner dengan panjang $3$ yang memenuhi syarat:

# Masalah String Biner

## Contoh

Buatlah sebuah formulasi rekursif untuk menentukan banyaknya string biner (hanya memuat angka $0$ atau $1$) dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan. Dari formulasi yang diperoleh, carilah banyaknya string biner dengan panjang $5$ yang memenuhi syarat tersebut.

Ilustrasi:

- String biner dengan panjang $1$ yang memenuhi syarat: $0$ dan $1$
- String biner dengan panjang $2$ yang memenuhi syarat: $01$, $10$, dan $11$.
- String biner dengan panjang $3$ yang memenuhi syarat: $010$, $011$, $101$, $110$, dan $111$.

# Solusi Masalah String Biner

- Misalkan $a_n$ adalah banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:

# Solusi Masalah String Biner

- Misalkan $a_n$ adalah banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
  1. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $1$ (berbentuk $XX\ldots XX1$).

# Solusi Masalah String Biner

- Misalkan $a_n$ adalah banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
  1. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $1$ (berbentuk $XX \ldots XX1$).
  2. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $0$ (berbentuk $XX \ldots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $1$

# Solusi Masalah String Biner

- Misalkan $a_n$ adalah banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
    1. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $1$ (berbentuk $XX\ldots XX1$).
    2. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $0$ (berbentuk $XX\ldots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $1$ sama dengan

# Solusi Masalah String Biner

- Misalkan $a_n$ adalah banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
  1. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $1$ (berbentuk $XX \ldots XX1$).
  2. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $0$ (berbentuk $XX \ldots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $1$
  sama dengan
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n-1$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berutuan.

# Solusi Masalah String Biner

- Misalkan $a_n$ adalah banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
  1. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $1$ (berbentuk $XX\ldots XX1$).
  2. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $0$ (berbentuk $XX\ldots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $1$
  sama dengan
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n-1$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berutuan.
  Mengapa?

# Solusi Masalah String Biner

- Misalkan $a_n$ adalah banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
    1. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $1$ (berbentuk $XX \ldots XX1$).
    2. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $0$ (berbentuk $XX \ldots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $1$
  sama dengan
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n-1$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berutuan.
  Mengapa?
  $\underbrace{XXX \ldots XXX}_{\alpha}1$

# Solusi Masalah String Biner

- Misalkan $a_n$ adalah banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.
- Barisan biner dapat dikelompokkan dalam dua kelompok yang saling lepas:
  1. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $1$ (berbentuk $XX \ldots XX1$).
  2. Barisan biner yang diakhiri oleh angka $0$ (berbentuk $XX \ldots XX0$).
- Untuk kasus 1: banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $1$
  sama dengan
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n-1$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berutuan.
  Mengapa?
  $\underbrace{XXX \ldots XXX}_{\alpha}1$
  $\alpha$ : barisan biner apapun yang tidak memuat dua angka $0$ berurutan dengan panjang $n-1$.

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$ harus memiliki angka $1$ pada digit ke $n-1$ (dihitung dari kiri).

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$ harus memiliki angka $1$ pada digit ke $n-1$ (dihitung dari kiri).
  Mengapa? (silakan dijawab)

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$ harus memiliki angka $1$ pada digit ke $n-1$ (dihitung dari kiri).
  Mengapa? (silakan dijawab)
  Oleh karena itu

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$ harus memiliki angka $1$ pada digit ke $n-1$ (dihitung dari kiri).
  Mengapa? (silakan dijawab)
  Oleh karena itu
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$ harus memiliki angka $1$ pada digit ke $n-1$ (dihitung dari kiri).
  Mengapa? (silakan dijawab)
  Oleh karena itu
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$
  sama dengan

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$ harus memiliki angka $1$ pada digit ke $n-1$ (dihitung dari kiri).
  Mengapa? (silakan dijawab)
  Oleh karena itu
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$
  sama dengan
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n-2$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$ harus memiliki angka $1$ pada digit ke $n-1$ (dihitung dari kiri).
  Mengapa? (silakan dijawab)
  Oleh karena itu
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$
  sama dengan
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n-2$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.
  Mengapa?

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$ harus memiliki angka $1$ pada digit ke $n-1$ (dihitung dari kiri).
  Mengapa? (silakan dijawab)
  Oleh karena itu
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$
  sama dengan
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n-2$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.
  Mengapa?
  $\underbrace{XXX\ldots XXX}_{\beta}10$

- Untuk kasus 2: barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$ harus memiliki angka $1$ pada digit ke $n-1$ (dihitung dari kiri).
  Mengapa? (silakan dijawab)
  Oleh karena itu
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan dan diakhiri dengan angka $0$
  sama dengan
  banyaknya barisan biner dengan panjang $n-2$ yang tidak memuat dua angka $0$ secara berurutan.
  Mengapa?
  $\underbrace{XXX\ldots XXX}_{\beta}10$
  $\beta$ : barisan biner apapun yang tidak memuat dua angka $0$ berurutan dengan panjang $n-2$.

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n =$

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$. Kemudian banyaknya string biner dengan panjang $5$ yang memenuhi syarat adalah

$$a_5 =$$

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$. Kemudian banyaknya string biner dengan panjang $5$ yang memenuhi syarat adalah

$$a_5 = a_4 + a_3 =$$

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$. Kemudian banyaknya string biner dengan panjang $5$ yang memenuhi syarat adalah

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + a_3 = (a_3 + a_2) + a_3 = 2a_3 + a_2 \\ &= \end{aligned}$$

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$. Kemudian banyaknya string biner dengan panjang $5$ yang memenuhi syarat adalah

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + a_3 = (a_3 + a_2) + a_3 = 2a_3 + a_2 \\ &= 2(a_2 + a_1) + a_2 = 3a_2 + 2a_1 = 3(3) + 2(2) = 13. \end{aligned}$$

Hal ini juga dapat dihitung secara bertahap sebagai berikut:

Dari penjelasan kasus 1 dan kasus 2, diperoleh relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$. Kemudian banyaknya string biner dengan panjang $5$ yang memenuhi syarat adalah

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + a_3 = (a_3 + a_2) + a_3 = 2a_3 + a_2 \\ &= 2(a_2 + a_1) + a_2 = 3a_2 + 2a_1 = 3(3) + 2(2) = 13. \end{aligned}$$

Hal ini juga dapat dihitung secara bertahap sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8 \\ a_5 &= a_4 + a_2 = 8 + 5 = 13. \end{aligned}$$

**Permasalahan**

Apakah terdapat suatu formulasi eksplisit untuk menentukan $a_n$?

# Bahasan

# Relasi Rekurensi Linier

## Definisi

**Relasi rekurensi linier** dengan **koefisien konstan** berderajat $k$ $(k \in \mathbb{N})$ untuk sebuah barisan bilangan real $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ adalah persamaan

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = f(n), \text{ untuk } k \leq n, \tag{4}$$

dengan $f(n)$ adalah suatu fungsi, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ adalah $k+1$ buah bilangan real, $a_k \neq 0$.
Jika $f(n) = 0$, maka relasi rekurensi

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0, \text{ untuk } k \leq n, \tag{5}$$

disebut sebagai relasi rekurensi linier **homogen** dengan koefisien konstan. Jika $f(n) \neq 0$, maka (4) disebut sebagai relasi rekurensi linier **tak homogen** dengan koefisien konstan. Selanjutnya nilai $x_n = c_n$ untuk $0 \leq n < k$ disebut sebagai syarat awal untuk (4) atau (5).

Perhatikan bahwa jika suatu relasi rekurensi linier homogen berderajat $k$ dengan koefisien konstan dapat berbentuk

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k}$$

dan suatu relasi rekurensi linier tak homogen dengan koefisien konstan dapat berbentuk

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} + f(n),$$

untuk suatu fungsi $f$ yang bukan berupa fungsi nol.

## Contoh

Perhatikan relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
2. $2x_n + 5x_{n-1} = 2^n$ merupakan relasi rekurensi

## Contoh

Perhatikan relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
2. $2x_n + 5x_{n-1} = 2^n$ merupakan relasi rekurensi linier tak homogen berderajat satu dengan koefisien konstan.
3. $x_n = (x_{n-1})^2 + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi

## Contoh

Perhatikan relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
2. $2x_n + 5x_{n-1} = 2^n$ merupakan relasi rekurensi linier tak homogen berderajat satu dengan koefisien konstan.
3. $x_n = (x_{n-1})^2 + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi tak linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
4. $x_n = nx_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi

## Contoh

Perhatikan relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
2. $2x_n + 5x_{n-1} = 2^n$ merupakan relasi rekurensi linier tak homogen berderajat satu dengan koefisien konstan.
3. $x_n = (x_{n-1})^2 + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi tak linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
4. $x_n = nx_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien tak konstan.
5. $3x_n = \frac{1}{n}x_{n-1} + x_{n-2}^n + x_{n-3} + n!$ merupakan relasi rekurensi

## Contoh

Perhatikan relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
2. $2x_n + 5x_{n-1} = 2^n$ merupakan relasi rekurensi linier tak homogen berderajat satu dengan koefisien konstan.
3. $x_n = (x_{n-1})^2 + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi tak linier homogen berderajat dua dengan koefisien konstan.
4. $x_n = nx_{n-1} + x_{n-2}$ merupakan relasi rekurensi linier homogen berderajat dua dengan koefisien tak konstan.
5. $3x_n = \frac{1}{n}x_{n-1} + x_{n-2}^n + x_{n-3} + n!$ merupakan relasi rekurensi tak linier tak homogen berderajat tiga dengan koefisien tak konstan.

## Catatan

Definisi linieritas pada relasi rekurensi ini serupa dengan linieritas persamaan linier pada perkuliahan Matriks dan Ruang Vektor.

# Polinom Karakteristik

## Definisi

Misalkan

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = f(n) \tag{6}$$

merupakan suatu relasi rekurensi linier sebagaimana dijelaskan dalam sebelumnya, polinom

$$p(\lambda) = a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \cdots + a_k$$

disebut sebagai polinom karakteristik dari rekurensi linier (6). Persamaan $p(\lambda) = 0$ disebut sebagai persamaan karakteristik. Bilangan $r$ yang memenuhi $p(r) = 0$ dikatakan sebagai **akar karakteristik**. Kemudian banyaknya kemunculan dari suatu akar karakteristik dinamakan dengan multiplisitas dari akar tersebut.

## Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
2. $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
3. $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
4. $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

## Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
2. $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
3. $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
4. $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

1. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah

## Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
2. $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
3. $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
4. $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

1. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.

## Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
2. $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
3. $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
4. $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

1. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
2. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah

## Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
2. $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
3. $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
4. $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

1. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
2. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.

## Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
2. $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
3. $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
4. $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

1. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
2. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.
3. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 11x_{n-2} - 6x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah

## Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
2. $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
3. $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
4. $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

1. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
2. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.
3. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 11x_{n-2} - 6x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.

## Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
2. $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
3. $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
4. $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

1. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
2. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.
3. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 11x_{n-2} - 6x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.
4. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n + 3x_{n-1} + 3x_{n-2} + x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah

## Contoh

Tentukan persamaan karakteristik dari relasi rekurensi berikut:

1. $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$
2. $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$
3. $x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}$
4. $x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}$

Solusi:

1. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$.
2. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.
3. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n - 6x_{n-1} + 11x_{n-2} - 6x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$.
4. Relasi rekurensi dapat ditulis $x_n + 3x_{n-1} + 3x_{n-2} + x_{n-3} = 0$, sehingga persamaan karakteristik yang bersesuaian adalah $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$.

# Solusi Relasi Rekurensi Orde Dua (Akar Berbeda)

## Teorema (Solusi relasi rekurensi orde dua (akar berbeda))

Misalkan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dan persamaan $\lambda^2 - c_1\lambda - c_2 = 0$ memiliki dua akar berbeda $r_1$ dan $r_2$, maka semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2}$$

berbentuk

$$x_n = A r_1^n + B r_2^n,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

untuk suatu konstanta $A$ dan $B$.

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \tag{7}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \tag{7}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau}$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \tag{7}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \tag{7}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n =$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \tag{7}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \tag{7}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A + B = 2$, dan $x_1 =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \tag{7}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A + B = 2$, dan $x_1 = 2A - B = 7$. Oleh karena itu diperoleh $A =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \tag{7}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A + B = 2$, dan $x_1 = 2A - B = 7$. Oleh karena itu diperoleh $A = 3$ dan $B =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \tag{7}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A + B = 2$, dan $x_1 = 2A - B = 7$. Oleh karena itu diperoleh $A = 3$ dan $B = -1$, sehingga solusi umum rekurensi ini adalah

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \qquad (7)$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 7$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (7) adalah

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = -1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema sebelumnya solusi relasi rekurensi (7) adalah

$$x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A + B = 2$, dan $x_1 = 2A - B = 7$. Oleh karena itu diperoleh $A = 3$ dan $B = -1$, sehingga solusi umum rekurensi ini adalah

$$x_n = 3 \cdot 2^n - 1(-1)^n.$$

# Solusi Relasi Rekurensi Orde Dua (Akar Kembar)

## Teorema (Solusi relasi rekurensi orde dua (akar kembar))

Misalkan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dengan $c_2 \neq 0$ dan persamaan $\lambda^2 - c_1\lambda - c_2 = 0$ memiliki akar kembar $r_0$, maka semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2}$$

berbentuk

$$x_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)\, r_0^n,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

untuk suatu konstanta $A$ dan $B$.

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \tag{8}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \tag{8}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \tag{8}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n =$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \tag{8}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n = A3^n + Bn3^n = (A + Bn)\,3^n,$$

tinjau bahwa $x_0 =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \tag{8}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n = A3^n + Bn3^n = (A + Bn)\,3^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A = 1$, dan $x_1 =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \tag{8}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n = A3^n + Bn3^n = (A + Bn)\,3^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A = 1$, dan $x_1 = 3A + 3B = 6$. Oleh karena itu diperoleh $A$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \tag{8}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n = A3^n + Bn3^n = (A + Bn)\,3^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A = 1$, dan $x_1 = 3A + 3B = 6$. Oleh karena itu diperoleh $A = B = 1$, sehingga solusi umum rekurensi ini adalah

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \tag{8}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$ dan $x_1 = 6$.

Solusi: Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi (8) adalah

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ atau } (\lambda - 3)^2 = 0$$

sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (8) adalah

$$x_n = A3^n + Bn3^n = (A + Bn)\,3^n,$$

tinjau bahwa $x_0 = A = 1$, dan $x_1 = 3A + 3B = 6$. Oleh karena itu diperoleh $A = B = 1$, sehingga solusi umum rekurensi ini adalah

$$x_n = (1 + n)\,3^n.$$

# Suplemen: Solusi Rekurensi Orde $k$ (Akar Berbeda)

## Teorema (Solusi relasi rekurensi orde $k$ (akar berbeda))

Misalkan $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ dan persamaan

$$\lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - c_2\lambda^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

memiliki $k$ buah akar $r_1, r_2, \ldots, r_k$ yang berbeda, maka solusi relasi rekurensi

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

berbentuk

$$x_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \cdots + A_k r_k^n,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

untuk suatu konstanta $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}, \tag{9}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, dan $x_2 = 15$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (9) adalah

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}, \tag{9}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, dan $x_2 = 15$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (9) adalah

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \text{ atau}$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}, \tag{9}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, dan $x_2 = 15$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (9) adalah

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \text{ atau } (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0,$$

sehingga akar-akarnya adalah

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}, \tag{9}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, dan $x_2 = 15$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (9) adalah

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \text{ atau } (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0,$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, dan $r_3 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (9) adalah

$$x_n =$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 6x_{n-1} - 11x_{n-2} + 6x_{n-3}, \tag{9}$$

dengan syarat awal $x_0 = 2$, $x_1 = 5$, dan $x_2 = 15$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (9) adalah

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \text{ atau } (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0,$$

sehingga akar-akarnya adalah $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, dan $r_3 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (9) adalah

$$x_n = A_1 1^n + A_2 2^n + A_3 3^n,$$

tinjau bahwa:

1. $x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 2,$
2. $x_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 5,$
3. $x_2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 15,$

akibatnya didapatkan $A_1 =$

tinjau bahwa:

1. $x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 2$,
2. $x_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 5$,
3. $x_2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 15$,

akibatnya didapatkan $A_1 = 1$, $A_2 =$

tinjau bahwa:

1. $x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 2,$
2. $x_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 5,$
3. $x_2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 15,$

akibatnya didapatkan $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, dan $A_3 =$

tinjau bahwa:

1. $x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 2,$
2. $x_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 5,$
3. $x_2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 15,$

akibatnya didapatkan $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, dan $A_3 = 2$, oleh karena itu diperoleh solusi umum

tinjau bahwa:

1. $x_0 = A_1 + A_2 + A_3 = 2,$
2. $x_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 5,$
3. $x_2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 15,$

akibatnya didapatkan $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, dan $A_3 = 2$, oleh karena itu diperoleh solusi umum

$$x_n = 1^n - 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

# Suplemen: Solusi Rekurensi Orde $k$ (Akar Duplikat)

## Teorema (Solusi relasi rekurensi orde $k$ (akar duplikat))

Misalkan $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ dan persamaan

$$\lambda^k - c_1\lambda^{k-1} - c_2\lambda^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

memiliki $t$ akar $(t < n)$ berbeda, yaitu $r_1, r_2, \ldots, r_t$, masing-masing dengan multiplisitas $m_1, m_2, \ldots, m_t$ $(m_1 + m_2 + \cdots + m_t = k)$, maka solusi relasi rekurensi

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

berbentuk

$$\begin{aligned} x_n &= \left(A_{1,0} + A_{1,1}n + A_{1,2}n^2 + \cdots + A_{1,m_1-1}n^{m_1-1}\right) r_1^n \\ &\quad + \left(A_{2,0} + A_{2,1}n + A_{2,2}n^2 + \cdots + A_{2,m_2-1}n^{m_2-1}\right) r_2^n \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \left(A_{t,0} + A_{t,1}n + A_{t,2}n^2 + \cdots + A_{t,m_t-1}n^{m_t-1}\right) r_t^n, \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}_0$, untuk suatu konstanta $A_{i,j}$ (dengan $0 \le i \le t$ dan $0 \le j \le m_i - 1$).

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}, \tag{10}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, dan $x_2 = -1$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (10) adalah

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}, \tag{10}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, dan $x_2 = -1$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (10) adalah

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)^3 = 0,$$

sehingga diperoleh suatu akar $r_1 =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}, \tag{10}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, dan $x_2 = -1$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (10) adalah

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)^3 = 0,$$

sehingga diperoleh suatu akar $r_1 = -1$ dengan multiplisitas $m_1 =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}, \tag{10}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, dan $x_2 = -1$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (10) adalah

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)^3 = 0,$$

sehingga diperoleh suatu akar $r_1 = -1$ dengan multiplisitas $m_1 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (10) adalah

$$x_n =$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = -3x_{n-1} - 3x_{n-2} - x_{n-3}, \tag{10}$$

dengan syarat awal $x_0 = 1$, $x_1 = -2$, dan $x_2 = -1$.

Solusi: Persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi (10) adalah

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \text{ atau } (\lambda + 1)^3 = 0,$$

sehingga diperoleh suatu akar $r_1 = -1$ dengan multiplisitas $m_1 = 3$. Menurut teorema sebelumnya solusi dari relasi rekurensi (10) adalah

$$\begin{aligned} x_n &= \left(A_{1,0} + A_{1,1}n + A_{1,2}n^2\right) r_1^n \\ &= \left(A_{1,0} + A_{1,1}n + A_{1,2}n^2\right) (-1)^n \end{aligned}$$

tinjau bahwa:

1. $x_0 = A_{1,0} = 1,$
2. $x_1 = -(A_{1,0} + A_{1,1} + A_{1,2}) = -2,$
3. $x_2 = A_{1,0} + 2A_{1,1} + 4A_{1,2} = -1,$

akibatnya didapatkan $A_{1,0} =$

tinjau bahwa:

1. $x_0 = A_{1,0} = 1,$
2. $x_1 = -(A_{1,0} + A_{1,1} + A_{1,2}) = -2,$
3. $x_2 = A_{1,0} + 2A_{1,1} + 4A_{1,2} = -1,$

akibatnya didapatkan $A_{1,0} = 1$, $A_{1,1} =$

tinjau bahwa:

1. $x_0 = A_{1,0} = 1,$
2. $x_1 = -(A_{1,0} + A_{1,1} + A_{1,2}) = -2,$
3. $x_2 = A_{1,0} + 2A_{1,1} + 4A_{1,2} = -1,$

akibatnya didapatkan $A_{1,0} = 1$, $A_{1,1} = 3$, dan $A_{1,2} =$

tinjau bahwa:

1. $x_0 = A_{1,0} = 1,$
2. $x_1 = -\left(A_{1,0} + A_{1,1} + A_{1,2}\right) = -2,$
3. $x_2 = A_{1,0} + 2A_{1,1} + 4A_{1,2} = -1,$

akibatnya didapatkan $A_{1,0} = 1$, $A_{1,1} = 3$, dan $A_{1,2} = -2$, oleh karena itu diperoleh solusi umum

tinjau bahwa:

1. $x_0 = A_{1,0} = 1,$
2. $x_1 = -(A_{1,0} + A_{1,1} + A_{1,2}) = -2,$
3. $x_2 = A_{1,0} + 2A_{1,1} + 4A_{1,2} = -1,$

akibatnya didapatkan $A_{1,0} = 1$, $A_{1,1} = 3$, dan $A_{1,2} = -2$, oleh karena itu diperoleh solusi umum

$$x_n = \left(1 + 3n - 2n^2\right)(-1)^n .$$

# Bahasan

# Latihan: Solusi Relasi Rekurensi Linier Homogen

## Latihan

Berikan solusi umum untuk relasi rekurensi linier berikut:

1. $w_n = 2w_{n-1}$ untuk setiap $n \geq 1$ dengan $w_0 = 3$. Tuliskan nilai untuk $w_{2023}$.
2. $x_n = 4x_{n-2}$ untuk setiap $n \geq 2$ dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = -1$. Tuliskan nilai untuk $x_{2023}$.
3. $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ untuk setiap $n \geq 2$ dengan $y_0 = 1$ dan $y_1 = 4$. Tuliskan nilai untuk $y_{2023}$.
4. $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ untuk setiap $n \geq 2$ dengan $z_0 = 0$ dan $z_1 = 1$. Tuliskan nilai untuk $z_{2023}$.

# Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah

# Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r =$

# Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$w_n =$$

# Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$w_n = Ar^n = A \cdot 2^n.$$

Karena $w_0 =$

# Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$w_n = Ar^n = A \cdot 2^n.$$

Karena $w_0 = A \cdot 2^0 = A = 3$, akibatnya diperoleh solusi umum

$$w_n =$$

# Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$w_n = Ar^n = A \cdot 2^n.$$

Karena $w_0 = A \cdot 2^0 = A = 3$, akibatnya diperoleh solusi umum

$$w_n = 3 \cdot 2^n$$

dan nilai dari $w_{2023}$ adalah

$$w_{2023} =$$

# Solusi Soal 1

Persamaan karakteristik untuk $w_n = 2w_{n-1}$ adalah $\lambda - 2 = 0$, sehingga diperoleh akar $r = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$w_n = Ar^n = A \cdot 2^n.$$

Karena $w_0 = A \cdot 2^0 = A = 3$, akibatnya diperoleh solusi umum

$$w_n = 3 \cdot 2^n$$

dan nilai dari $w_{2023}$ adalah

$$w_{2023} = 3 \cdot 2^{2023}.$$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah
$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 =$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah
$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 =$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n =$$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 =$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 =$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A =$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B =$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah
$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$.
Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B = \frac{1}{4}$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$x_n =$$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B = \frac{1}{4}$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$x_n = \frac{3}{4} \cdot (-2)^n + \frac{1}{4} \cdot 2^n$$

dan nilai dari $x_{2023}$ adalah

$$x_{2023} =$$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B = \frac{1}{4}$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$x_n = \frac{3}{4} \cdot (-2)^n + \frac{1}{4} \cdot 2^n$$

dan nilai dari $x_{2023}$ adalah

$$\begin{aligned} x_{2023} &= \frac{3}{4}(-2)^{2023} + \frac{1}{4}(2)^{2023} \\ &= \end{aligned}$$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B = \frac{1}{4}$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$x_n = \frac{3}{4} \cdot (-2)^n + \frac{1}{4} \cdot 2^n$$

dan nilai dari $x_{2023}$ adalah

$$\begin{aligned} x_{2023} &= \frac{3}{4}(-2)^{2023} + \frac{1}{4}(2)^{2023} \\ &= -\frac{3}{4}\left(2^{2023}\right) + \frac{1}{4}\left(2^{2023}\right) \\ &= \end{aligned}$$

# Solusi Soal 2

Persamaan karakteristik untuk $x_n = 4x_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = -2$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 2^n.$$

Karena $x_0 = A + B = 1$ dan $x_1 = -2A + 2B = -1$, maka diperoleh $A = \frac{3}{4}$ dan $B = \frac{1}{4}$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$x_n = \frac{3}{4} \cdot (-2)^n + \frac{1}{4} \cdot 2^n$$

dan nilai dari $x_{2023}$ adalah

$$\begin{aligned} x_{2023} &= \frac{3}{4}(-2)^{2023} + \frac{1}{4}(2)^{2023} \\ &= -\frac{3}{4}\left(2^{2023}\right) + \frac{1}{4}\left(2^{2023}\right) \\ &= \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(2^{2023}\right) = -2^{2022}. \end{aligned}$$

# Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah

# Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 =$

# Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n =$$

# Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)\, r_0^n = (A + Bn)\, (-1)^n .$$

Karena $y_0 =$

# Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)\, r_0^n = (A + Bn)\,(-1)^n\,.$$

Karena $y_0 = A\,(-1)^0 = 1$ dan $y_1 =$

# Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)\, r_0^n = (A + Bn)\,(-1)^n\,.$$

Karena $y_0 = A\,(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)\,(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A =$

# Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)\, r_0^n = (A + Bn)\,(-1)^n .$$

Karena $y_0 = A\,(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)\,(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A = 1$ dan $B =$

# Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)\, r_0^n = (A + Bn)\, (-1)^n .$$

Karena $y_0 = A\,(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)\,(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A = 1$ dan $B = -5$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$y_n =$$

# Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)\, r_0^n = (A + Bn)\,(-1)^n\,.$$

Karena $y_0 = A\,(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)\,(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A = 1$ dan $B = -5$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$y_n = (1 - 5n)\,(-1)^n$$

dan nilai dari $y_{2023}$ adalah

$$y_{2023} =$$

# Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)\, r_0^n = (A + Bn)\,(-1)^n\,.$$

Karena $y_0 = A\,(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)\,(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A = 1$ dan $B = -5$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$y_n = (1 - 5n)\,(-1)^n$$

dan nilai dari $y_{2023}$ adalah

$$\begin{aligned} y_{2023} &= (1 - 5\,(2023))\,(-1)^{2023} \\ &= \end{aligned}$$

# Solusi Soal 3

Persamaan karakteristik untuk $y_n = -2y_{n-1} - y_{n-2}$ adalah $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r_0 = -1$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$y_n = Ar_0^n + Bnr_0^n = (A + Bn)\, r_0^n = (A + Bn)\,(-1)^n\,.$$

Karena $y_0 = A\,(-1)^0 = 1$ dan $y_1 = (A + B)\,(-1)^1 = 4$, maka diperoleh $A = 1$ dan $B = -5$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$y_n = (1 - 5n)\,(-1)^n$$

dan nilai dari $y_{2023}$ adalah

$$\begin{aligned} y_{2023} &= (1 - 5\,(2023))\,(-1)^{2023} \\ &= 5\,(2023) - 1 \\ &= 10\,114. \end{aligned}$$

# Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah

# Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 =$

# Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 =$

# Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n =$$

# Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 =$

# Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 =$

# Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 = A + B(2)^1 = A + 2B = 1$, maka $A =$

# Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 = A + B(2)^1 = A + 2B = 1$, maka $A = -1$ dan $B =$

# Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 = A + B(2)^1 = A + 2B = 1$, maka $A = -1$ dan $B = 1$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$z_n =$$

# Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 = A + B(2)^1 = A + 2B = 1$, maka $A = -1$ dan $B = 1$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$z_n = -1 + 2^n$$

dan nilai dari $z_{2023}$ adalah

$$z_{2023} =$$

# Solusi Soal 4

Persamaan karakteristik untuk $z_n = 3z_{n-1} - 2z_{n-2}$ adalah $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, sehingga diperoleh akar $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$. Menurut teorema, solusi relasi rekurensi berbentuk

$$z_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(1)^n + B(2)^n = A + B(2)^n.$$

Karena $z_0 = A + B(2)^0 = A + B = 0$ dan $z_1 = A + B(2)^1 = A + 2B = 1$, maka $A = -1$ dan $B = 1$. Akibatnya diperoleh solusi umum

$$z_n = -1 + 2^n$$

dan nilai dari $z_{2023}$ adalah

$$z_{2023} = -1 + 2^{2023} = 2^{2023} - 1.$$

# Bahasan

# Challenging Problem

## Latihan

Tentukan solusi eksplisit untuk relasi-relasi rekurensi berikut:

1. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_1 = 2$ dan $a_2 = 3$,
2. $a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3}$ untuk $n \geq 3$ dengan syarat awal $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, dan $a_2 = 2$

# Bahasan

# RR Homogen yang Bersesuaian dengan RR Tak Homogen

Materi terkait solusi untuk relasi rekurensi linier tak homogen berkoefisien konstan akan dipelajari lebih jauh dalam kuliah Desain dan Analisis Algoritma (DAA).

## Definisi (RR homogen yang bersesuaian dengan RR tak homogen)

Misalkan

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + f(n), \tag{11}$$

dengan $c_i$ konstan untuk setiap $i \in \{1, \ldots, n-k\}$ dan $f$ bukan berupa fungsi nol, maka

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{12}$$

disebut sebagai relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian (atau berkaitan) dengan relasi rekurensi linier tak homogen (11).

# Solusi Homogen dan Solusi Partikular

## Teorema

Misalkan barisan $\left(x_n^{(h)}\right)$ adalah solusi umum untuk relasi rekurensi linier homogen dengan koefisien konstan

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \tag{13}$$

dan $\left(x_n^{(p)}\right)$ adalah barisan yang memenuhi relasi rekurensi linier tak homogen dengan koefisien konstan

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + f(n), \tag{14}$$

maka setiap solusi dari relasi rekurensi linier tak homogen (14) berbentuk barisan

$$\left(x_n^{(h)} + x_n^{(p)}\right).$$

Selanjutnya barisan $\left(x_n^{(p)}\right)$ disebut sebagai solusi partikular/ solusi khusus (*particular solution*) untuk relasi rekurensi linier tak homogen (14) dan $\left(x_n^{(h)}\right)$ disebut sebagai solusi homogen untuk relasi rekurensi linier homogen (13).

## Teorema

Apabila barisan $(u_n)$ adalah sebuah solusi partikular untuk relasi rekurensi linier tak homogen

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k} = f(n), \tag{15}$$

untuk suatu $k \leq n$, dan barisan $(v_n)$ adalah sebuah solusi partikular untuk relasi rekurensi linier tak homogen

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k} = g(n), \tag{16}$$

untuk suatu $k \leq n$, maka

$$(w_n) = (u_n + v_n) \tag{17}$$

adalah sebuah solusi partikular untuk relasi rekurensi linier tak homogen

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k} = f(n) + g(n). \tag{18}$$

# Metode Mencari Solusi Partikular

Metode untuk mencari solusi partikular $\left(x_n^{(p)}\right)$ bergantung pada bentuk fungsi $f(n)$ sebagai berikut.

1. Jika $f(n)$ pada relasi rekurensi linier (14) berbentuk polinom

$$f(n) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i,$$

maka solusi partikular $\left(x_n^{(p)}\right)$ yang bersesuaian juga memiliki bentuk yang serupa, yaitu

$$\left(x_n^{(p)}\right) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_k x^k = \sum_{i=0}^{k} \beta_i x^i. \tag{19}$$

Koefisien-koefisien $\beta_i$ untuk $i \in \{0, \ldots, k\}$ dapat ditentukan dengan mensubstitusikan (19) ke (14).

2. Jika $f(n)$ pada relasi rekurensi linier (14) berbentuk

$$f(n) = d^n \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i,$$

untuk suatu konstanta $d$, maka solusi partikular $\left(x_n^{(p)}\right)$ yang bersesuaian juga memiliki bentuk yang serupa, yaitu

$$f(n) = d^n \sum_{i=0}^{k} \beta_i x. \quad (20)$$

Koefisien-koefisien $\beta_i$ untuk $i \in \{0, \ldots, k\}$ dapat ditentukan dengan mensubstitusikan (20) ke (14).

# Contoh

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \tag{21}$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \quad (21)$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n =$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \tag{21}$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan $p_n$ ke (21) diperoleh

$$p_n =$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \tag{21}$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan $p_n$ ke (21) diperoleh

$$p_n = 3p_{n-1} + 2n$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \tag{21}$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan $p_n$ ke (21) diperoleh

$$\begin{aligned} p_n &= 3p_{n-1} + 2n \\ An + B &= 3(A(n-1) + B) + 2n \end{aligned}$$

# Contoh

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \tag{21}$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan $p_n$ ke (21) diperoleh

$$\begin{aligned} p_n &= 3p_{n-1} + 2n \\ An + B &= 3(A(n-1) + B) + 2n \\ (-2A-2)n + (3A-2B) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga $A =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \tag{21}$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan $p_n$ ke (21) diperoleh

$$\begin{aligned} p_n &= 3p_{n-1} + 2n \\ An + B &= 3(A(n-1) + B) + 2n \\ (-2A - 2)n + (3A - 2B) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga $A = -1$ dan $B =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \tag{21}$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan $p_n$ ke (21) diperoleh

$$\begin{aligned} p_n &= 3p_{n-1} + 2n \\ An + B &= 3(A(n-1) + B) + 2n \\ (-2A - 2)n + (3A - 2B) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga $A = -1$ dan $B = -\frac{3}{2}$. Jadi diperoleh solusi partikular $x_n^{(p)} =$

# Contoh

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 3x_{n-1} + 2n. \tag{21}$$

Relasi rekurensi (21) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 2n$. Karena $f(n)$ merupakan polinom berderajat satu, maka akan dicoba polinom berderajat satu

$$p_n = An + B, \text{ dengan } A \text{ dan } B \text{ konstan}$$

untuk mendapatkan solusi partikular dari (21). Dengan mensubstitusikan $p_n$ ke (21) diperoleh

$$\begin{aligned} p_n &= 3p_{n-1} + 2n \\ An + B &= 3(A(n-1) + B) + 2n \\ (-2A - 2)n + (3A - 2B) &= 0, \end{aligned}$$

sehingga $A = -1$ dan $B = -\frac{3}{2}$. Jadi diperoleh solusi partikular $x_n^{(p)} = -n - \frac{3}{2}$.

Solusi homogen dari relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (21), yaitu

Solusi homogen dari relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (21), yaitu

$$x_n = 3x_{n-1},$$

adalah $x_n^{(h)} =$

Solusi homogen dari relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (21), yaitu

$$x_n = 3x_{n-1},$$

adalah $x_n^{(h)} = C \cdot 3^n$, untuk suatu konstanta $C$. Akibatnya, menurut teorema sebelumnya, solusi umum dari (21) adalah

$$x_n =$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (21), yaitu

$$x_n = 3x_{n-1},$$

adalah $x_n^{(h)} = C \cdot 3^n$, untuk suatu konstanta $C$. Akibatnya, menurut teorema sebelumnya, solusi umum dari (21) adalah

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= \end{aligned}$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (21), yaitu

$$x_n = 3x_{n-1},$$

adalah $x_n^{(h)} = C \cdot 3^n$, untuk suatu konstanta $C$. Akibatnya, menurut teorema sebelumnya, solusi umum dari (21) adalah

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= C \cdot 3^n - n - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 7^n. \tag{22}$$

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 7^n. \tag{22}$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi (22) adalah

$$x_n^{(h)} =$$

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 7^n. \tag{22}$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi (22) adalah

$$x_n^{(h)} = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n,$$

untuk suatu konstanta $A$ dan $B$. Karena (22) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) =$

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 7^n. \tag{22}$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi (22) adalah

$$x_n^{(h)} = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n,$$

untuk suatu konstanta $A$ dan $B$. Karena (22) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 7^n$, solusi partikular yang dapat dicoba adalah

$$x_n^{(p)} =$$

## Contoh

Tentukan semua solusi dari relasi rekurensi

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} + 7^n. \tag{22}$$

Solusi homogen dari relasi rekurensi (22) adalah

$$x_n^{(h)} = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n,$$

untuk suatu konstanta $A$ dan $B$. Karena (22) merupakan relasi rekurensi linier tak homogen dengan $f(n) = 7^n$, solusi partikular yang dapat dicoba adalah

$$x_n^{(p)} = \alpha \cdot 7^n, \text{ untuk suatu konstata } \alpha.$$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 7^n &= 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n, \\ &\quad \text{mengalikan kedua ruas dengan } 7^2 \text{ menghasilkan} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 7^n &= 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n, \\ & \quad \text{mengalikan kedua ruas dengan } 7^2 \text{ menghasilkan} \\ 49\alpha \cdot 7^n &= 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot 7^n &= 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n, \\
&\quad \text{mengalikan kedua ruas dengan } 7^2 \text{ menghasilkan} \\
49\alpha \cdot 7^n &= 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n \\
20\alpha \cdot 7^n &= 49 \cdot 7^n
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot 7^n &= 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n, \\
&\phantom{=} \text{mengalikan kedua ruas dengan } 7^2 \text{ menghasilkan} \\
49\alpha \cdot 7^n &= 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n \\
20\alpha \cdot 7^n &= 49 \cdot 7^n \\
\alpha &= \frac{49}{20}.
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan $x_n^{(p)} =$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot 7^n &= 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n, \\
& \quad \text{mengalikan kedua ruas dengan } 7^2 \text{ menghasilkan} \\
49\alpha \cdot 7^n &= 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n \\
20\alpha \cdot 7^n &= 49 \cdot 7^n \\
\alpha &= \frac{49}{20}.
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan $x_n^{(p)} = \frac{49}{20} \cdot 7^n$. Oleh karenanya solusi umum dari (22) adalah

$$x_n =$$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot 7^n &= 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n, \\
& \quad \text{mengalikan kedua ruas dengan } 7^2 \text{ menghasilkan} \\
49\alpha \cdot 7^n &= 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n \\
20\alpha \cdot 7^n &= 49 \cdot 7^n \\
\alpha &= \frac{49}{20}.
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan $x_n^{(p)} = \frac{49}{20} \cdot 7^n$. Oleh karenanya solusi umum dari (22) adalah

$$\begin{aligned}
x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\
&=
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $x_n^{(p)}$ ke (22) diperoleh

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot 7^n &= 5\alpha \cdot 7^{n-1} - 6\alpha \cdot 7^{n-2} + 7^n, \\
& \quad \text{mengalikan kedua ruas dengan } 7^2 \text{ menghasilkan} \\
49\alpha \cdot 7^n &= 35\alpha \cdot 7^n - 6\alpha \cdot 7^n + 49 \cdot 7^n \\
20\alpha \cdot 7^n &= 49 \cdot 7^n \\
\alpha &= \frac{49}{20}.
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan $x_n^{(p)} = \frac{49}{20} \cdot 7^n$. Oleh karenanya solusi umum dari (22) adalah

$$\begin{aligned}
x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\
&= A \cdot 3^n + B \cdot 2^n + \frac{49}{20} \cdot 7^n.
\end{aligned}$$

# Teorema Terkait Solusi Partikular

## Teorema

Misalkan barisan $(x_n)$ memenuhi relasi rekurensi linier tak homogen

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + f(n), \tag{23}$$

dengan $c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ bilangan real dan

$$f(n) = \left(d_0 + d_1 n + d_2 n^2 + \cdots + d_t n^t\right) s^n,$$

dengan $d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ dan $s$ bilangan real, maka

1. apabila $s$ bukan akar dari persamaan karakteristik relasi rekurensi homogen yang bersesuian dengan (23) maka terdapat solusi partikular yang berbentuk

$$\left(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \cdots + A_{t-1} n^{t-1} + A_t n^t\right) s^n,$$

dengan $A_0, \ldots, A_t \in \mathbb{R}$.

2. apabila $s$ akar dengan multipilisitas $m$ dari persamaan karakteristik relasi rekurensi homogen yang bersesuian dengan (23) maka terdapat solusi partikular yang berbentuk

$$n^m\left(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \cdots + A_{t-1} n^{t-1} + A_t n^t\right) s^n,$$

dengan $A_0, \ldots, A_t \in \mathbb{R}$.

# Latihan

## Latihan

Carilah solusi partikular yang mungkin dari relasi rekurensi linier tak homogen

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + f(n), \tag{24}$$

bila

1. $f(n) = 3^n$,
2. $f(n) = n \cdot 3^n$,
3. $f(n) = n^2 \cdot 2^n$, dan
4. $f(n) = (n^2 + 1) \cdot 3^n$.

Relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (24) adalah

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \tag{25}$$

persamaan karakteristiknya adalah

Relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (24) adalah

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \tag{25}$$

persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r = 3$ (multiplisitas $2$). Berdasarkan teorema solusi homogen untuk (24) adalah

$$x_n^{(h)} =$$

Relasi rekurensi linier homogen yang bersesuaian dengan (24) adalah

$$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}, \tag{25}$$

persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, sehingga diperoleh akar kembar $r = 3$ (multiplisitas $2$). Berdasarkan teorema solusi homogen untuk (24) adalah

$$x_n^{(h)} = (A + Bn) \cdot 3^n.$$

1. Untuk $f(n) = 3^n$, karena $3$ merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas $2$ untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk

1. Untuk $f(n) = 3^n$, karena $3$ merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas $2$ untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0) \cdot 3^n$.
2. Untuk $f(n) = n \cdot 3^n$, karena $3$ merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas $2$ untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan Teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk

1. Untuk $f(n) = 3^n$, karena $3$ merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas $2$ untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0) \cdot 3^n$.
2. Untuk $f(n) = n \cdot 3^n$, karena $3$ merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas $2$ untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan Teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0 + A_1 n) \cdot 3^n$.
3. Untuk $f(n) = n^2 \cdot 2^n$, karena $2$ bukan akar karakteristik untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk

1. Untuk $f(n) = 3^n$, karena $3$ merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas $2$ untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0) \cdot 3^n$.
2. Untuk $f(n) = n \cdot 3^n$, karena $3$ merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas $2$ untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan Teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0 + A_1 n) \cdot 3^n$.
3. Untuk $f(n) = n^2 \cdot 2^n$, karena $2$ bukan akar karakteristik untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = \left(A_0 + A_1 n + A_2 n^2\right) \cdot 2^n$.
4. Untuk $f(n) = \left(n^2 + 1\right) \cdot 3^n$, karena $3$ merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas $2$ untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk

1. Untuk $f(n) = 3^n$, karena $3$ merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas $2$ untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0) \cdot 3^n$.
2. Untuk $f(n) = n \cdot 3^n$, karena $3$ merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas $2$ untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan Teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 (A_0 + A_1 n) \cdot 3^n$.
3. Untuk $f(n) = n^2 \cdot 2^n$, karena $2$ bukan akar karakteristik untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = \left(A_0 + A_1 n + A_2 n^2\right) \cdot 2^n$.
4. Untuk $f(n) = \left(n^2 + 1\right) \cdot 3^n$, karena $3$ merupakan akar karakteristik dengan multiplisitas $2$ untuk relasi rekurensi linier homogen (25), maka berdasarkan teorema solusi partikular yang mungkin berbentuk $x_n^{(p)} = n^2 \left(A_0 + A_1 n + A_2 n^2\right) \cdot 3^n$.