Fungsi: Definisi, Sifat, dan Representasinya

Kuliah Matematika Diskret Semester Genap 2022-2023

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

Maret 2023

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications* , Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Mathematics for Computer Science*. MIT, 2010, oleh E. Lehman, F. T. Leighton, A. R. Meyer.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 2 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
5. *Slide* kuliah Matematika Diskrit di Telkom University oleh B. Purnama.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

Bahasan

Bahasan

Fungsi: Definisi

Definisi

Diberikan dua himpunan tak kosong A dan B. Sebuah fungsi dari A ke B merupakan suatu **relasi** yang mengaitkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Fungsi dari A ke B dapat ditulis dalam notasi berikut

$$\begin{aligned} f &: A \to B \\ &: a \mapsto b, \text{ dengan } a \in A \text{ dan } b \in B \end{aligned}$$

Fungsi juga dinamakan dengan *pemetaan* atau *transformasi*. Notasi $f(a) = b$ menyatakan bahwa a dipetakan (oleh f) ke b.
Selanjutnya himpunan A dikatakan daerah asal (domain) dari f dan dinotasikan dengan $\mathrm{dom}(f)$, sedangkan himpunan B dikatakan daerah tujuan (kodomain) dari f dan dinotasikan dengan $\mathrm{cod}(f)$.

Fungsi Total dan Fungsi Parsial

Fungsi Total dan Fungsi Parsial

- Setiap fungsi yang akan kita tinjau dalam perkuliahan ini akan diasumsikan sebagai fungsi total (kecuali disebutkan selain itu).

Fungsi Total dan Fungsi Parsial

Fungsi Total dan Fungsi Parsial

- Setiap fungsi yang akan kita tinjau dalam perkuliahan ini akan diasumsikan sebagai fungsi total (kecuali disebutkan selain itu).
- Fungsi total $f : A \to B$ adalah fungsi dengan sifat: f mengaitkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Di sekolah menengah kita telah banyak melihat contoh fungsi total, yaitu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x + 1$.

Fungsi Total dan Fungsi Parsial

Fungsi Total dan Fungsi Parsial

- Setiap fungsi yang akan kita tinjau dalam perkuliahan ini akan diasumsikan sebagai fungsi total (kecuali disebutkan selain itu).
- Fungsi total $f : A \to B$ adalah fungsi dengan sifat: f mengaitkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Di sekolah menengah kita telah banyak melihat contoh fungsi total, yaitu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x + 1$.
- Fungsi parsial adalah fungsi yang tidak bersifat total, fungsi parsial $f : A \to B$ adalah fungsi dengan sifat: f mengaitkan setiap anggota A dengan paling banyak satu anggota B. Di sekolah menengah (maupun di Kalkulus) kita telah melihat contoh fungsi parsial, yaitu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \sqrt{x}$.

Fungsi Total dan Fungsi Parsial

Fungsi Total dan Fungsi Parsial

- Setiap fungsi yang akan kita tinjau dalam perkuliahan ini akan diasumsikan sebagai fungsi total (kecuali disebutkan selain itu).
- Fungsi total $f : A \to B$ adalah fungsi dengan sifat: f mengaitkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Di sekolah menengah kita telah banyak melihat contoh fungsi total, yaitu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x + 1$.
- Fungsi parsial adalah fungsi yang tidak bersifat total, fungsi parsial $f : A \to B$ adalah fungsi dengan sifat: f mengaitkan setiap anggota A dengan paling banyak satu anggota B. Di sekolah menengah (maupun di Kalkulus) kita telah melihat contoh fungsi parsial, yaitu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \sqrt{x}$. Perhatikan bahwa $\mathrm{dom}(f) \neq \mathbb{R}$ karena f tidak terdefinisi untuk $x < 0$, contohnya nilai $f(-3)$ tidak terdefinisi.

Peta, Prapeta, dan Daerah Jelajah (Range)

Misalkan $f : A \to B$ dan $f(a) = b$ untuk $a \in A$ dan $b \in B$, maka

Peta, Prapeta, dan Daerah Jelajah (Range)

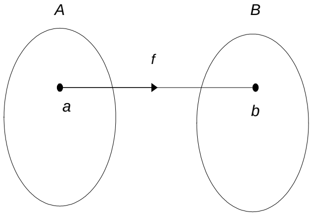
Misalkan $f : A \to B$ dan $f(a) = b$ untuk $a \in A$ dan $b \in B$, maka

- b dikatakan peta/bayangan (*image*) dari a,

Peta, Prapeta, dan Daerah Jelajah (Range)

Misalkan $f : A \to B$ dan $f(a) = b$ untuk $a \in A$ dan $b \in B$, maka

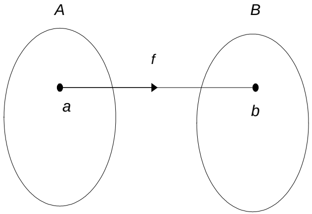
- b dikatakan peta/bayangan (*image*) dari a,
- a dikatakan prapeta/pra-bayangan (*preimage*) dari b.



Peta, Prapeta, dan Daerah Jelajah (Range)

Misalkan $f : A \to B$ dan $f(a) = b$ untuk $a \in A$ dan $b \in B$, maka

- b dikatakan peta/bayangan (*image*) dari a,
- a dikatakan prapeta/pra-bayangan (*preimage*) dari b.

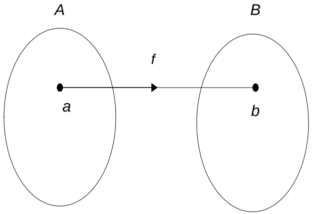


Daerah jelajah atau daerah hasil (*range*) dari f, dinotasikan dengan $\mathrm{ran}(f)$ atau $\mathrm{Im}(f)$, didefinisikan sebagai
$\mathrm{ran}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{b \in B \mid b = f(a)$, untuk suatu $a \in A\}$. Jelas bahwa
$\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{cod}(f)$.

Peta, Prapeta, dan Daerah Jelajah (Range)

Misalkan $f : A \to B$ dan $f(a) = b$ untuk $a \in A$ dan $b \in B$, maka

- b dikatakan peta/bayangan (*image*) dari a,
- a dikatakan prapeta/pra-bayangan (*preimage*) dari b.



Daerah jelajah atau daerah hasil (*range*) dari f, dinotasikan dengan $\mathrm{ran}(f)$ atau $\mathrm{Im}(f)$, didefinisikan sebagai
$\mathrm{ran}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{b \in B \mid b = f(a), \text{ untuk suatu } a \in A\}$. Jelas bahwa $\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{cod}(f)$.

Jika f adalah fungsi dari A ke B, kita katakan f memetakan A ke B (f *maps* A *to* B).

Kesamaan Dua Fungsi

Definisi

Dua fungsi f dan g dikatakan **sama** bila

1. $\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{dom}\,(g)$
2. $\mathrm{cod}\,(f) = \mathrm{cod}\,(g)$
3. untuk setiap x yang ditinjau pada domain berlaku $f\,(x) = g\,(x)$.

Kesamaan dua fungsi dapat dipandang sebagai kesamaan himpunan (dengan meninjau fungsi sebagai suatu relasi).

Contoh

Kesamaan Dua Fungsi

Definisi

Dua fungsi f dan g dikatakan **sama** bila

1. $\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{dom}\,(g)$
2. $\mathrm{cod}\,(f) = \mathrm{cod}\,(g)$
3. untuk setiap x yang ditinjau pada domain berlaku $f\,(x) = g\,(x)$.

Kesamaan dua fungsi dapat dipandang sebagai kesamaan himpunan (dengan meninjau fungsi sebagai suatu relasi).

Contoh

Fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f\,(x) = x + 1$ dan $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dengan $g\,(x) = x + 1$ tidak sama, meskipun formulasi keduanya sama.

Kesamaan Dua Fungsi

Definisi

Dua fungsi f dan g dikatakan **sama** bila

1. $\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{dom}\,(g)$
2. $\mathrm{cod}\,(f) = \mathrm{cod}\,(g)$
3. untuk setiap x yang ditinjau pada domain berlaku $f\,(x) = g\,(x)$.

Kesamaan dua fungsi dapat dipandang sebagai kesamaan himpunan (dengan meninjau fungsi sebagai suatu relasi).

Contoh

Fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f\,(x) = x + 1$ dan $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dengan $g\,(x) = x + 1$ tidak sama, meskipun formulasi keduanya sama. Hal ini terjadi karena $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{Z}$ sedangkan $\mathrm{dom}\,(g) = \mathbb{Q}$.

Fungsi Sebagai Relasi

- Fungsi merupakan relasi dengan sifat khusus.

Fungsi Sebagai Relasi

- Fungsi merupakan relasi dengan sifat khusus.
- Suatu relasi biner $f \subseteq A \times B$ merupakan fungsi bila memenuhi: jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$. Dalam formula logika predikat hal ini ditulis sebagai $(\forall a \in A)\,(\forall b \in B)\,(\forall c \in B)\ \ ((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \rightarrow b = c)$.

Fungsi Sebagai Relasi

- Fungsi merupakan relasi dengan sifat khusus.
- Suatu relasi biner $f \subseteq A \times B$ merupakan fungsi bila memenuhi: jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$. Dalam formula logika predikat hal ini ditulis sebagai $(\forall a \in A)\,(\forall b \in B)\,(\forall c \in B)\ \ ((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \rightarrow b = c)$.
- Karena fungsi juga merupakan relasi, maka sifat-sifat relasi juga berlaku pada fungsi.

Fungsi dapat direpresentasikan dalam bentuk:

Fungsi Sebagai Relasi

- Fungsi merupakan relasi dengan sifat khusus.
- Suatu relasi biner $f \subseteq A \times B$ merupakan fungsi bila memenuhi: jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$. Dalam formula logika predikat hal ini ditulis sebagai $(\forall a \in A)\,(\forall b \in B)\,(\forall c \in B)\ \ ((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \rightarrow b = c)$.
- Karena fungsi juga merupakan relasi, maka sifat-sifat relasi juga berlaku pada fungsi.

Fungsi dapat direpresentasikan dalam bentuk:

- pasangan terurut,

Fungsi Sebagai Relasi

- Fungsi merupakan relasi dengan sifat khusus.
- Suatu relasi biner $f \subseteq A \times B$ merupakan fungsi bila memenuhi: jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$. Dalam formula logika predikat hal ini ditulis sebagai $(\forall a \in A)\,(\forall b \in B)\,(\forall c \in B)\ \ ((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \to b = c)$.
- Karena fungsi juga merupakan relasi, maka sifat-sifat relasi juga berlaku pada fungsi.

Fungsi dapat direpresentasikan dalam bentuk:

- pasangan terurut,
- formula pengisian nilai (*assignment*),

Fungsi Sebagai Relasi

- Fungsi merupakan relasi dengan sifat khusus.
- Suatu relasi biner $f \subseteq A \times B$ merupakan fungsi bila memenuhi: jika $(a,b) \in f$ dan $(a,c) \in f$, maka $b = c$. Dalam formula logika predikat hal ini ditulis sebagai $(\forall a \in A)\,(\forall b \in B)\,(\forall c \in B)\ \ ((a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \rightarrow b = c)$.
- Karena fungsi juga merupakan relasi, maka sifat-sifat relasi juga berlaku pada fungsi.

Fungsi dapat direpresentasikan dalam bentuk:

- pasangan terurut,
- formula pengisian nilai (*assignment*),
- definisi dalam bahasa natural,

Fungsi Sebagai Relasi

- Fungsi merupakan relasi dengan sifat khusus.
- Suatu relasi biner $f \subseteq A \times B$ merupakan fungsi bila memenuhi: jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$. Dalam formula logika predikat hal ini ditulis sebagai $(\forall a \in A)\,(\forall b \in B)\,(\forall c \in B)\;\;((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \rightarrow b = c)$.
- Karena fungsi juga merupakan relasi, maka sifat-sifat relasi juga berlaku pada fungsi.

Fungsi dapat direpresentasikan dalam bentuk:

- pasangan terurut,
- formula pengisian nilai (*assignment*),
- definisi dalam bahasa natural,
- definisi dalam bahasa pemrograman,

Fungsi Sebagai Relasi

- Fungsi merupakan relasi dengan sifat khusus.
- Suatu relasi biner $f \subseteq A \times B$ merupakan fungsi bila memenuhi: jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$. Dalam formula logika predikat hal ini ditulis sebagai $(\forall a \in A)\,(\forall b \in B)\,(\forall c \in B)\ \ ((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \rightarrow b = c)$.
- Karena fungsi juga merupakan relasi, maka sifat-sifat relasi juga berlaku pada fungsi.

Fungsi dapat direpresentasikan dalam bentuk:

- pasangan terurut,
- formula pengisian nilai (*assignment*),
- definisi dalam bahasa natural,
- definisi dalam bahasa pemrograman,
- diagram panah (jika domain dan kodomain fungsi kardinalitasnya berhingga)

Fungsi Sebagai Relasi

- Fungsi merupakan relasi dengan sifat khusus.
- Suatu relasi biner $f \subseteq A \times B$ merupakan fungsi bila memenuhi: jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$. Dalam formula logika predikat hal ini ditulis sebagai $(\forall a \in A)\,(\forall b \in B)\,(\forall c \in B)\ \ ((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \rightarrow b = c)$.
- Karena fungsi juga merupakan relasi, maka sifat-sifat relasi juga berlaku pada fungsi.

Fungsi dapat direpresentasikan dalam bentuk:

- pasangan terurut,
- formula pengisian nilai (*assignment*),
- definisi dalam bahasa natural,
- definisi dalam bahasa pemrograman,
- diagram panah (jika domain dan kodomain fungsi kardinalitasnya berhingga)
- matriks $0 - 1$ (jika domain dan kodomain fungsi kardinalitasnya berhingga)

Fungsi Sebagai Relasi

- Fungsi merupakan relasi dengan sifat khusus.
- Suatu relasi biner $f \subseteq A \times B$ merupakan fungsi bila memenuhi: jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$. Dalam formula logika predikat hal ini ditulis sebagai $(\forall a \in A)\,(\forall b \in B)\,(\forall c \in B)\ \ ((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \to b = c)$.
- Karena fungsi juga merupakan relasi, maka sifat-sifat relasi juga berlaku pada fungsi.

Fungsi dapat direpresentasikan dalam bentuk:

- pasangan terurut,
- formula pengisian nilai (*assignment*),
- definisi dalam bahasa natural,
- definisi dalam bahasa pemrograman,
- diagram panah (jika domain dan kodomain fungsi kardinalitasnya berhingga)
- matriks $0 - 1$ (jika domain dan kodomain fungsi kardinalitasnya berhingga)
- digraf (jika domain dan kodomain fungsi sama dan kardinalitasnya berhingga)

Kita telah melihat representasi pasangan terurut, diagram panah, matriks, dan digraf pada kajian relasi.

Representasi Fungsi dengan Pasangan Terurut

Sebagaimana relasi, fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut.

Contoh

Relasi $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ dari himpunan $X = \{1, 2, 3\}$ ke $Y = \{a, b, c\}$ merupakan suatu fungsi.

Representasi Fungsi dengan Pasangan Terurut

Sebagaimana relasi, fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut.

Contoh

Relasi $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ dari himpunan $X = \{1, 2, 3\}$ ke $Y = \{a, b, c\}$ merupakan suatu fungsi. Kita juga dapat menuliskan fungsi ini sebagai $f(1) = a$, $f(2) = b$, dan $f(3) = c$.

Representasi Fungsi dengan Pasangan Terurut

Sebagaimana relasi, fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut.

Contoh

Relasi $f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ dari himpunan $X = \{1,2,3\}$ ke $Y = \{a,b,c\}$ merupakan suatu fungsi. Kita juga dapat menuliskan fungsi ini sebagai $f(1) = a$, $f(2) = b$, dan $f(3) = c$. Kita memiliki $\mathrm{dom}(f) = X$, $\mathrm{cod}(f) = Y$, dan $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{Im}(f) = Y$.
Relasi $g = \{(1,a),(2,b),(3,b)\}$ dari himpunan $X = \{1,2,3\}$ ke $Y = \{a,b,c\}$ merupakan suatu fungsi.

Representasi Fungsi dengan Pasangan Terurut

Sebagaimana relasi, fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut.

Contoh

Relasi $f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ dari himpunan $X = \{1,2,3\}$ ke $Y = \{a,b,c\}$ merupakan suatu fungsi. Kita juga dapat menuliskan fungsi ini sebagai $f(1) = a$, $f(2) = b$, dan $f(3) = c$. Kita memiliki $\mathrm{dom}(f) = X$, $\mathrm{cod}(f) = Y$, dan $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{Im}(f) = Y$.
Relasi $g = \{(1,a),(2,b),(3,b)\}$ dari himpunan $X = \{1,2,3\}$ ke $Y = \{a,b,c\}$ merupakan suatu fungsi. Kita juga dapat menuliskan fungsi ini sebagai $g(1) = a$, $g(2) = b$, dan $g(3) = b$.

Representasi Fungsi dengan Pasangan Terurut

Sebagaimana relasi, fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut.

Contoh

Relasi $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ dari himpunan $X = \{1, 2, 3\}$ ke $Y = \{a, b, c\}$ merupakan suatu fungsi. Kita juga dapat menuliskan fungsi ini sebagai $f(1) = a$, $f(2) = b$, dan $f(3) = c$. Kita memiliki $\mathrm{dom}(f) = X$, $\mathrm{cod}(f) = Y$, dan $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{Im}(f) = Y$.

Relasi $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ dari himpunan $X = \{1, 2, 3\}$ ke $Y = \{a, b, c\}$ merupakan suatu fungsi. Kita juga dapat menuliskan fungsi ini sebagai $g(1) = a$, $g(2) = b$, dan $g(3) = b$. Kita memiliki $\mathrm{dom}(g) = X$, $\mathrm{cod}(g) = Y$, dan $\mathrm{ran}(g) = \mathrm{Im}(g) = \{a, b\} \subset Y$.

Latihan: Fungsi Sebagai Pasangan Terurut

Latihan

Tentukan apakah relasi-relasi yang dinyatakan dalam pasangan terurut berikut merupakan fungsi atau bukan. Jika merupakan fungsi, tentukan domain, kodomain, dan range-nya.

1. f relasi dari $X = \{1, 2, 3\}$ ke $Y = \{a, b, c\}$ dengan $f = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$.
2. g relasi dari $X = \{1, 2, 3\}$ ke $Y = \{a, b, c\}$ dengan $g = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, c)\}$.
3. h relasi dari $X = \{1, 2, 3\}$ ke $Y = \{a, b, c\}$ dengan $h = \{(1, a), (2, c)\}$.
4. k relasi dari $X = \{1, 2, 3\}$ ke $Y = \{a, b, c\}$ dengan $k = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}$.

Solusi:

1. f adalah fungsi dari X ke Y dengan $\mathrm{dom}\,(f) = X$, $\mathrm{cod}\,(f) = Y$, $\mathrm{ran}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f) = \{a\}$.

Solusi:

1. f adalah fungsi dari X ke Y dengan $\mathrm{dom}\,(f) = X$, $\mathrm{cod}\,(f) = Y$, $\mathrm{ran}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f) = \{a\}$.
2. g bukan fungsi dari X ke Y karena $(2, b) \in g$ dan $(2, c) \in g$, tetapi $b \neq c$.

Solusi:

1. f adalah fungsi dari X ke Y dengan $\operatorname{dom}(f) = X$, $\operatorname{cod}(f) = Y$, $\operatorname{ran}(f) = \operatorname{Im}(f) = \{a\}$.
2. g bukan fungsi dari X ke Y karena $(2, b) \in g$ dan $(2, c) \in g$, tetapi $b \neq c$. Dengan perkataan lain $(2, b) \in g \wedge (2, c) \in g \rightarrow b = c$ bernilai F.

Solusi:

1. f adalah fungsi dari X ke Y dengan $\mathrm{dom}\,(f) = X$, $\mathrm{cod}\,(f) = Y$, $\mathrm{ran}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f) = \{a\}$.
2. g bukan fungsi dari X ke Y karena $(2, b) \in g$ dan $(2, c) \in g$, tetapi $b \neq c$. Dengan perkataan lain $(2, b) \in g \wedge (2, c) \in g \rightarrow b = c$ bernilai F.
3. h bukan fungsi dari X ke Y karena tidak ada $y \in Y$ sehingga $(3, y) \in h$, atau $h\,(3)$ tidak terdefinisi.

Solusi:

1. f adalah fungsi dari X ke Y dengan $\mathrm{dom}\,(f) = X$, $\mathrm{cod}\,(f) = Y$, $\mathrm{ran}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f) = \{a\}$.
2. g bukan fungsi dari X ke Y karena $(2, b) \in g$ dan $(2, c) \in g$, tetapi $b \neq c$. Dengan perkataan lain $(2, b) \in g \wedge (2, c) \in g \to b = c$ bernilai F.
3. h bukan fungsi dari X ke Y karena tidak ada $y \in Y$ sehingga $(3, y) \in h$, atau $h\,(3)$ tidak terdefinisi. Di sini h bukan fungsi (total), namun dapat dikatakan sebagai fungsi parsial.

Solusi:

1. f adalah fungsi dari X ke Y dengan $\operatorname{dom}(f) = X$, $\operatorname{cod}(f) = Y$, $\operatorname{ran}(f) = \operatorname{Im}(f) = \{a\}$.
2. g bukan fungsi dari X ke Y karena $(2, b) \in g$ dan $(2, c) \in g$, tetapi $b \neq c$. Dengan perkataan lain $(2, b) \in g \wedge (2, c) \in g \rightarrow b = c$ bernilai F.
3. h bukan fungsi dari X ke Y karena tidak ada $y \in Y$ sehingga $(3, y) \in h$, atau $h(3)$ tidak terdefinisi. Di sini h bukan fungsi (total), namun dapat dikatakan sebagai fungsi parsial.
4. k bukan fungsi dari X ke Y karena:

Solusi:

1. f adalah fungsi dari X ke Y dengan $\operatorname{dom}(f) = X$, $\operatorname{cod}(f) = Y$, $\operatorname{ran}(f) = \operatorname{Im}(f) = \{a\}$.
2. g bukan fungsi dari X ke Y karena $(2, b) \in g$ dan $(2, c) \in g$, tetapi $b \neq c$. Dengan perkataan lain $(2, b) \in g \wedge (2, c) \in g \to b = c$ bernilai F.
3. h bukan fungsi dari X ke Y karena tidak ada $y \in Y$ sehingga $(3, y) \in h$, atau $h(3)$ tidak terdefinisi. Di sini h bukan fungsi (total), namun dapat dikatakan sebagai fungsi parsial.
4. k bukan fungsi dari X ke Y karena:
   - $(2, b) \in k$ dan $(2, c) \in k$ namun $b \neq c$

Solusi:

1. f adalah fungsi dari X ke Y dengan $\mathrm{dom}(f) = X$, $\mathrm{cod}(f) = Y$, $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{a\}$.
2. g bukan fungsi dari X ke Y karena $(2, b) \in g$ dan $(2, c) \in g$, tetapi $b \neq c$. Dengan perkataan lain $(2, b) \in g \wedge (2, c) \in g \rightarrow b = c$ bernilai F.
3. h bukan fungsi dari X ke Y karena tidak ada $y \in Y$ sehingga $(3, y) \in h$, atau $h(3)$ tidak terdefinisi. Di sini h bukan fungsi (total), namun dapat dikatakan sebagai fungsi parsial.
4. k bukan fungsi dari X ke Y karena:
   - $(2, b) \in k$ dan $(2, c) \in k$ namun $b \neq c$
   - tidak ada $y \in Y$ sehingga $(3, y) \in k$, atau $k(3)$ tidak terdefinisi.

Representasi Fungsi dengan Formula Pengisian Nilai

Fungsi paling lazim dinotasikan dengan formula pengisian nilai (sebagaimana dipelajari di sekolah menengah).

Contoh

Misalkan $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ adalah relasi yang didefinisikan dengan pengaitan-pengaitan berikut:

1. $f(x) = x + 1$
2. $g(x) = x^3$
3. $h(x) = 3 - x$

Relasi f, g, h semuanya merupakan fungsi. Kita memiliki

Representasi Fungsi dengan Formula Pengisian Nilai

Fungsi paling lazim dinotasikan dengan formula pengisian nilai (sebagaimana dipelajari di sekolah menengah).

Contoh

Misalkan $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ adalah relasi yang didefinisikan dengan pengaitan-pengaitan berikut:

1. $f(x) = x + 1$
2. $g(x) = x^3$
3. $h(x) = 3 - x$

Relasi f, g, h semuanya merupakan fungsi. Kita memiliki

1. $f(x) = x + 1$ berarti setiap $x \in \mathbb{Z}$ dikaitkan (dipetakan) ke $x + 1$, jelas $(x + 1) \in \mathbb{Z}$.

Representasi Fungsi dengan Formula Pengisian Nilai

Fungsi paling lazim dinotasikan dengan formula pengisian nilai (sebagaimana dipelajari di sekolah menengah).

Contoh

Misalkan $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ adalah relasi yang didefinisikan dengan pengaitan-pengaitan berikut:

1. $f(x) = x + 1$
2. $g(x) = x^3$
3. $h(x) = 3 - x$

Relasi f, g, h semuanya merupakan fungsi. Kita memiliki

1. $f(x) = x + 1$ berarti setiap $x \in \mathbb{Z}$ dikaitkan (dipetakan) ke $x + 1$, jelas $(x + 1) \in \mathbb{Z}$.
2. $g(x) = x^3$ berarti setiap $x \in \mathbb{Z}$ dikaitkan (dipetakan) ke x^3, jelas $x^3 \in \mathbb{Z}$.

Representasi Fungsi dengan Formula Pengisian Nilai

Fungsi paling lazim dinotasikan dengan formula pengisian nilai (sebagaimana dipelajari di sekolah menengah).

Contoh

Misalkan $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ adalah relasi yang didefinisikan dengan pengaitan-pengaitan berikut:

1. $f(x) = x + 1$
2. $g(x) = x^3$
3. $h(x) = 3 - x$

Relasi f, g, h semuanya merupakan fungsi. Kita memiliki

1. $f(x) = x + 1$ berarti setiap $x \in \mathbb{Z}$ dikaitkan (dipetakan) ke $x + 1$, jelas $(x + 1) \in \mathbb{Z}$.
2. $g(x) = x^3$ berarti setiap $x \in \mathbb{Z}$ dikaitkan (dipetakan) ke x^3, jelas $x^3 \in \mathbb{Z}$.
3. $h(x) = 3 - x$ berarti setiap $x \in \mathbb{Z}$ dikaitkan (dipetakan) ke $3 - x$, jelas $3 - x \in \mathbb{Z}$.

Latihan: Fungsi Sebagai Pasangan Terurut

Latihan

Tentukan apakah relasi-relasi dengan formula-formula berikut merupakan fungsi atau bukan. Jika merupakan fungsi, tentukan domain, kodomain, dan range-nya.

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2$.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $g(x) = \frac{1}{x}$.
3. $h : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ dengan $h(x) = \frac{1}{x}$.
4. $k : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ dengan $k(x) = \sqrt{x}$.

Solusi:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2$ merupakan fungsi dengan $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{cod}(f) = \mathbb{Z}$, dan
   $\operatorname{ran}(f) = \operatorname{Im}(f) =$

Solusi:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2$ merupakan fungsi dengan $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{cod}(f) = \mathbb{Z}$, dan
$\mathrm{ran}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = x^2 \text{ untuk suatu } x \in \mathbb{Z}\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Solusi:

1. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2$ merupakan fungsi dengan $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{cod}(f) = \mathbb{Z}$, dan
   $\operatorname{ran}(f) = \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = x^2 \text{ untuk suatu } x \in \mathbb{Z}\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
   Jadi $\operatorname{ran}(f)$ atau $\operatorname{Im}(f)$ adalah himpunan seluruh bilangan bulat tak negatif yang merupakan kuadrat sempurna.

Solusi:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2$ merupakan fungsi dengan $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{cod}(f) = \mathbb{Z}$, dan
   $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = x^2 \text{ untuk suatu } x \in \mathbb{Z}\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
   Jadi $\mathrm{ran}(f)$ atau $\mathrm{Im}(f)$ adalah himpunan seluruh bilangan bulat tak negatif yang merupakan kuadrat sempurna.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $g(x) = \frac{1}{x}$ bukan merupakan fungsi, karena $g(0)$ tidak terdefinisi. g merupakan fungsi parsial, karena jika $x = 1$ atau $x = -1$, maka nilai $g(x)$ terdefinisi dan nilainya tunggal.

Solusi:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2$ merupakan fungsi dengan $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{Z}$, $\mathrm{cod}(f) = \mathbb{Z}$, dan
$\mathrm{ran}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = x^2 \text{ untuk suatu } x \in \mathbb{Z}\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
Jadi $\mathrm{ran}(f)$ atau $\mathrm{Im}(f)$ adalah himpunan seluruh bilangan bulat tak negatif yang merupakan kuadrat sempurna.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $g(x) = \frac{1}{x}$ bukan merupakan fungsi, karena $g(0)$ tidak terdefinisi. g merupakan fungsi parsial, karena jika $x = 1$ atau $x = -1$, maka nilai $g(x)$ terdefinisi dan nilainya tunggal.
3. $h : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ dengan $h(x) = \frac{1}{x}$ merupakan fungsi dengan $\mathrm{dom}(h) = \mathbb{Q}^+$, $\mathrm{cod}(h) = \mathbb{Q}^+$, dan
$\mathrm{ran}(h) = \mathrm{Im}(h) =$

Solusi:

1. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ dengan $f(x)=x^2$ merupakan fungsi dengan $\mathrm{dom}(f)=\mathbb{Z}$, $\mathrm{cod}(f)=\mathbb{Z}$, dan
   $\mathrm{ran}(f)=\mathrm{Im}(f)=\{y\in\mathbb{Z}\mid y=x^2 \text{ untuk suatu } x\in\mathbb{Z}\}=\{x^2\mid x\in\mathbb{Z}\}$.
   Jadi $\mathrm{ran}(f)$ atau $\mathrm{Im}(f)$ adalah himpunan seluruh bilangan bulat tak negatif yang merupakan kuadrat sempurna.
2. $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ dengan $g(x)=\frac{1}{x}$ bukan merupakan fungsi, karena $g(0)$ tidak terdefinisi. g merupakan fungsi parsial, karena jika $x=1$ atau $x=-1$, maka nilai $g(x)$ terdefinisi dan nilainya tunggal.
3. $h:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ dengan $h(x)=\frac{1}{x}$ merupakan fungsi dengan $\mathrm{dom}(h)=\mathbb{Q}^+$, $\mathrm{cod}(h)=\mathbb{Q}^+$, dan
   $\mathrm{ran}(h)=\mathrm{Im}(h)=\{y\in\mathbb{Q}^+\mid y=\frac{1}{x} \text{ untuk suatu } x\in\mathbb{Q}^+\}=\mathbb{Q}^+$, karena untuk setiap $y\in\mathbb{Q}^+$ terdapat $x\in\mathbb{Q}^+$ sehingga $xy=1$. Jadi $\mathrm{ran}(h)$ atau $\mathrm{Im}(h)$ adalah $\mathbb{Q}^+$.

Solusi:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2$ merupakan fungsi dengan $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{cod}(f) = \mathbb{Z}$, dan
   $\operatorname{ran}(f) = \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = x^2 \text{ untuk suatu } x \in \mathbb{Z}\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
   Jadi $\operatorname{ran}(f)$ atau $\operatorname{Im}(f)$ adalah himpunan seluruh bilangan bulat tak negatif yang merupakan kuadrat sempurna.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $g(x) = \frac{1}{x}$ bukan merupakan fungsi, karena $g(0)$ tidak terdefinisi. g merupakan fungsi parsial, karena jika $x = 1$ atau $x = -1$, maka nilai $g(x)$ terdefinisi dan nilainya tunggal.
3. $h : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ dengan $h(x) = \frac{1}{x}$ merupakan fungsi dengan $\operatorname{dom}(h) = \mathbb{Q}^+$, $\operatorname{cod}(h) = \mathbb{Q}^+$, dan
   $\operatorname{ran}(h) = \operatorname{Im}(h) = \{y \in \mathbb{Q}^+ \mid y = \frac{1}{x} \text{ untuk suatu } x \in \mathbb{Q}^+\} = \mathbb{Q}^+$, karena untuk setiap $y \in \mathbb{Q}^+$ terdapat $x \in \mathbb{Q}^+$ sehingga $xy = 1$. Jadi $\operatorname{ran}(h)$ atau $\operatorname{Im}(h)$ adalah $\mathbb{Q}^+$.
4. $k : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ dengan $k(x) = \sqrt{x}$ bukan merupakan fungsi, karena $k(2)$ tidak terdefinisi. Hal ini terjadi karena $k(2) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}^+$ (ingat kembali bahwa $\sqrt{2}$ bilangan irasional). k merupakan fungsi parsial, karena jika $\sqrt{x}$ terdefinisi dan $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}^+$, maka nilainya tunggal.

Representasi Fungsi dengan Bahasa Natural

Misalkan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2$. Maka f dapat dideskripsikan dalam bahasa natural sebagai: "f memetakan setiap bilangan bulat ke kuadrat dari bilangan tersebut".

Terlihat bahwa deskripsi fungsi f sebelumnya dengan formula pengisian nilai lebih singkat daripada deskripsi fungsi f dalam bahasa natural, namun hal ini tidak selamanya dapat kita temui.

Contoh

Misalkan $A = \{x \mid x$ string panjang 5 dengan karakternya pada $\{0, 1, 2\}\}$. Fungsi $f : A \to \mathbb{N}_0$ didefinisikan sebagai banyaknya karakter 2 pada string x. Contohnya:

1. $f(21222) =$

Terlihat bahwa deskripsi fungsi f sebelumnya dengan formula pengisian nilai lebih singkat daripada deskripsi fungsi f dalam bahasa natural, namun hal ini tidak selamanya dapat kita temui.

Contoh

Misalkan $A = \{x \mid x$ string panjang 5 dengan karakternya pada $\{0, 1, 2\}\}$. Fungsi $f : A \to \mathbb{N}_0$ didefinisikan sebagai banyaknya karakter 2 pada string x. Contohnya:

1. $f(21222) = 4$
2. $f(21202) =$

Terlihat bahwa deskripsi fungsi f sebelumnya dengan formula pengisian nilai lebih singkat daripada deskripsi fungsi f dalam bahasa natural, namun hal ini tidak selamanya dapat kita temui.

Contoh

Misalkan $A = \{x \mid x$ string panjang 5 dengan karakternya pada $\{0, 1, 2\}\}$. Fungsi $f : A \to \mathbb{N}_0$ didefinisikan sebagai banyaknya karakter 2 pada string x. Contohnya:

1. $f(21222) = 4$
2. $f(21202) = 3$
3. $f(02102) =$

Terlihat bahwa deskripsi fungsi f sebelumnya dengan formula pengisian nilai lebih singkat daripada deskripsi fungsi f dalam bahasa natural, namun hal ini tidak selamanya dapat kita temui.

Contoh

Misalkan $A = \{x \mid x$ string panjang 5 dengan karakternya pada $\{0, 1, 2\}\}$. Fungsi $f : A \to \mathbb{N}_0$ didefinisikan sebagai banyaknya karakter 2 pada string x. Contohnya:

1. $f(21222) = 4$
2. $f(21202) = 3$
3. $f(02102) = 2.$

f dapat pula dideskripsikan dengan formula pengisian berikut.

Terlihat bahwa deskripsi fungsi f sebelumnya dengan formula pengisian nilai lebih singkat daripada deskripsi fungsi f dalam bahasa natural, namun hal ini tidak selamanya dapat kita temui.

Contoh

Misalkan $A = \{x \mid x \text{ string panjang } 5 \text{ dengan karakternya pada } \{0,1,2\}\}$. Fungsi $f : A \to \mathbb{N}_0$ didefinisikan sebagai banyaknya karakter 2 pada string x. Contohnya:

1. $f(21222) = 4$
2. $f(21202) = 3$
3. $f(02102) = 2.$

f dapat pula dideskripsikan dengan formula pengisian berikut. Misalkan $x = x_1x_2x_3x_4x_5$

$$f(x) = f(x_1x_2x_3x_4x_5) =$$

Terlihat bahwa deskripsi fungsi f sebelumnya dengan formula pengisian nilai lebih singkat daripada deskripsi fungsi f dalam bahasa natural, namun hal ini tidak selamanya dapat kita temui.

Contoh

Misalkan $A = \{x \mid x \text{ string panjang } 5 \text{ dengan karakternya pada } \{0, 1, 2\}\}$. Fungsi $f : A \to \mathbb{N}_0$ didefinisikan sebagai banyaknya karakter 2 pada string x. Contohnya:

1. $f(21222) = 4$
2. $f(21202) = 3$
3. $f(02102) = 2$.

f dapat pula dideskripsikan dengan formula pengisian berikut. Misalkan $x = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$

$$f(x) = f(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = |\{x_i \mid (x_i = 2) \wedge (1 \leq i \leq 5)\}|.$$

Representasi Fungsi dengan Bahasa Pemrograman

Misalkan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ adalah fungsi dengan $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \text{ ganjil} \\ \frac{x}{2}, & x \text{ genap} \end{cases}$. Fungsi f dapat dideskripsikan dalam bahasa Python berikut.

Fungsi f dalam Python

```
def f(x):
    if (x%2 == 1):
        return(3 * x + 1)
    else:
        return(x // 2)
```

Bahasan

Bahasan

2. Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif
   - Fungsi Injektif
   - Fungsi Surjektif
   - Fungsi Bijektif
   - Latihan: Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif

Fungsi Injektif

Definisi (Fungsi injektif)

Misalkan $f : A \to B$ adalah sebuah fungsi, f dikatakan injektif (satu-satu) apabila setiap anggota domain dari f dipetakan ke anggota B yang berbeda, atau dengan perkataan lain untuk setiap $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(f)$ berlaku: jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$; dalam formula logika predikat hal ini ditulis

$$(\forall x_1)(\forall x_2) \quad (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)), \text{ yang ekuivalen dengan}$$
$$(\forall x_1)(\forall x_2) \quad (f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2).$$

Apabila f suatu fungsi injektif, maka f dikatakan sebagai suatu injeksi.

Catatan

Perhatikan bahwa $f : A \to B$ bersifat injektif (satu-satu) jika **tidak ada dua elemen** berbeda di A yang **memiliki peta (bayangan) yang sama**.

Contoh Fungsi Injektif

Contoh

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Fungsi $f : A \to B$ yang didefinisikan sebagai

$$f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 5, \text{ dan } f(d) = 2$$

merupakan fungsi injektif, karena tidak ada dua elemen A dengan nilai fungsi yang sama. Kita memiliki: jika $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$. Diagram panah dari fungsi ini dapat digambarkan sebagai berikut.

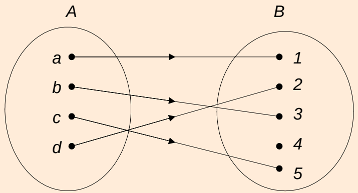
Contoh Fungsi Injektif

Contoh

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Fungsi $f : A \to B$ yang didefinisikan sebagai

$$f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 5, \text{ dan } f(d) = 2$$

merupakan fungsi injektif, karena tidak ada dua elemen A dengan nilai fungsi yang sama. Kita memiliki: jika $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$. Diagram panah dari fungsi ini dapat digambarkan sebagai berikut.



Memeriksa Sifat Injektif Fungsi

1. Untuk membuktikan bahwa f injektif, kita dapat menunjukkan bahwa jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.
2. Untuk membuktikan bahwa f tidak injektif, kita dapat mencari $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(f)$ dengan $x_1 \neq x_2$ yang memenuhi $f(x_1) = f(x_2)$.

Latihan

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut bersifat injektif atau tidak.

1. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$.
2. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$.
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$.

Solusi:

Latihan

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut bersifat injektif atau tidak.

1. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$.
2. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$.
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$.

Solusi:

1. f injektif, karena $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$,

Latihan

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut bersifat injektif atau tidak.

1. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$.
2. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$.
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$.

Solusi:

1. f injektif, karena $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$, tidak ada $a_1, a_2 \in A$ dengan sifat $a_1 \neq a_2$ tetapi $f(a_1) = f(a_2)$.

Latihan

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut bersifat injektif atau tidak.

1. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$.
2. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$.
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$.

Solusi:

1. f injektif, karena $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$, tidak ada $a_1, a_2 \in A$ dengan sifat $a_1 \neq a_2$ tetapi $f(a_1) = f(a_2)$.
2. f tidak injektif, karena $1 \neq 2$ tetapi $f(1) = f(2) = u$.

Latihan

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut bersifat injektif atau tidak.

1. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$.
2. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$.
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$.

Solusi:

1. f injektif, karena $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$, tidak ada $a_1, a_2 \in A$ dengan sifat $a_1 \neq a_2$ tetapi $f(a_1) = f(a_2)$.
2. f tidak injektif, karena $1 \neq 2$ tetapi $f(1) = f(2) = u$.
3. f tidak injektif, karena $-1 \neq 1$ tetapi $f(-1) = f(1) = 2$.

Latihan

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut bersifat injektif atau tidak.

1. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$.
2. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$.
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$.

Solusi:

1. f injektif, karena $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$, tidak ada $a_1, a_2 \in A$ dengan sifat $a_1 \neq a_2$ tetapi $f(a_1) = f(a_2)$.
2. f tidak injektif, karena $1 \neq 2$ tetapi $f(1) = f(2) = u$.
3. f tidak injektif, karena $-1 \neq 1$ tetapi $f(-1) = f(1) = 2$.
4. f injektif, karena kita memiliki:
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

Latihan

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut bersifat injektif atau tidak.

1. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$.
2. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$.
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$.

Solusi:

1. f injektif, karena $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$, tidak ada $a_1, a_2 \in A$ dengan sifat $a_1 \neq a_2$ tetapi $f(a_1) = f(a_2)$.
2. f tidak injektif, karena $1 \neq 2$ tetapi $f(1) = f(2) = u$.
3. f tidak injektif, karena $-1 \neq 1$ tetapi $f(-1) = f(1) = 2$.
4. f injektif, karena kita memiliki:
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow$

Latihan

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut bersifat injektif atau tidak.

1. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$.
2. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$.
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$.

Solusi:

1. f injektif, karena $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$, tidak ada $a_1, a_2 \in A$ dengan sifat $a_1 \neq a_2$ tetapi $f(a_1) = f(a_2)$.
2. f tidak injektif, karena $1 \neq 2$ tetapi $f(1) = f(2) = u$.
3. f tidak injektif, karena $-1 \neq 1$ tetapi $f(-1) = f(1) = 2$.
4. f injektif, karena kita memiliki:
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Jadi
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Bahasan

2. Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif
   - Fungsi Injektif
   - Fungsi Surjektif
   - Fungsi Bijektif
   - Latihan: Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif

Fungsi Surjektif

Definisi (Fungsi surjektif)

Misalkan $f : A \to B$ adalah sebuah fungsi, f dikatakan surjektif (pada[a]) apabila untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ yang memenuhi $f(a) = b$; dalam formula logika predikat hal ini ditulis

$$\forall y \exists x \ (y = f(x)), \text{ dengan } x \in A \text{ dan } y \in B.$$

Apabila f fungsi surjektif, maka f dikatakan sebagai suatu surjeksi.

[a]Kata pada di sini adalah alih bahasa dari kata *onto*. Jadi pada di sini adalah kata sifat, bukan kata hubung.

Catatan

Perhatikan bahwa $f : A \to B$ bersifat surjektif (pada) jika **setiap elemen B memiliki prapeta/pra-bayangan** (*preimage*). Kita juga dapat mengatakan bahwa $f : A \to B$ surjektif bila $\operatorname{ran}(f) = \operatorname{Im}(f) = B$.

Contoh Fungsi Surjektif

Contoh

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$. Fungsi $f : A \to B$ yang didefinisikan sebagai

$$f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 1, \text{ dan } f(d) = 2$$

merupakan fungsi surjektif, karena untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $f(x) = y$. Tinjau bahwa untuk $y = 1$ kita memiliki $f(a) = 1$ (dan juga $f(c) = 1$). Kemudian untuk $y = 2$ kita memiliki $f(d) = 2$. Terakhir, untuk $y = 3$ kita memiliki $f(b) = 3$.

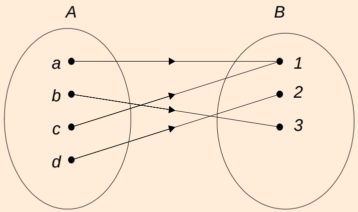
Contoh Fungsi Surjektif

Contoh

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$. Fungsi $f : A \to B$ yang didefinisikan sebagai

$$f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 1, \text{ dan } f(d) = 2$$

merupakan fungsi surjektif, karena untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $f(x) = y$. Tinjau bahwa untuk $y = 1$ kita memiliki $f(a) = 1$ (dan juga $f(c) = 1$). Kemudian untuk $y = 2$ kita memiliki $f(d) = 2$. Terakhir, untuk $y = 3$ kita memiliki $f(b) = 3$.



Memeriksa Sifat Surjektif Fungsi

1. Untuk membuktikan bahwa f surjektif, kita dapat menunjukkan bahwa jika $y \in B$ maka **selalu terdapat** $x \in A$ sehingga $f(x) = y$.
   Kita juga dapat menyimpulkan bahwa f surjektif bila $\mathrm{ran}(f) = B$.
2. Untuk membuktikan bahwa f tidak surjektif, cari $y \in B$ sehingga $y \neq f(x)$ untuk semua $x \in \mathrm{dom}(f)$.
   Kita juga dapat menyimpulkan bahwa f tidak surjektif bila $\mathrm{ran}(f) \neq B$ (dalam hal ini $\mathrm{ran}(f) \subset B$).

Latihan

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut bersifat surjektif atau tidak.

1. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w, x\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$.
2. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$.
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$.

Solusi:

1. f tidak surjektif karena $x \in B$ tidak memiliki prapeta, atau tidak ada $a \in A$ yang memenuhi $f(a) = x$.

Solusi:

1. f tidak surjektif karena $x \in B$ tidak memiliki prapeta, atau tidak ada $a \in A$ yang memenuhi $f(a) = x$.
2. f surjektif karena semua $b \in B$ memiliki prapeta. Kita memiliki $u = f(2)$, $v = f(3)$, dan $w = f(1)$.

Solusi:

1. f tidak surjektif karena $x \in B$ tidak memiliki prapeta, atau tidak ada $a \in A$ yang memenuhi $f(a) = x$.
2. f surjektif karena semua $b \in B$ memiliki prapeta. Kita memiliki $u = f(2)$, $v = f(3)$, dan $w = f(1)$.
3. f tidak surjektif karena tidak semua $y \in \mathbb{Z}$ memiliki prapeta.

Solusi:

1. f tidak surjektif karena $x \in B$ tidak memiliki prapeta, atau tidak ada $a \in A$ yang memenuhi $f(a) = x$.
2. f surjektif karena semua $b \in B$ memiliki prapeta. Kita memiliki $u = f(2)$, $v = f(3)$, dan $w = f(1)$.
3. f tidak surjektif karena tidak semua $y \in \mathbb{Z}$ memiliki prapeta. Salah satu *counterexample*-nya adalah $y =$

Solusi:

1. f tidak surjektif karena $x \in B$ tidak memiliki prapeta, atau tidak ada $a \in A$ yang memenuhi $f(a) = x$.
2. f surjektif karena semua $b \in B$ memiliki prapeta. Kita memiliki $u = f(2)$, $v = f(3)$, dan $w = f(1)$.
3. f tidak surjektif karena tidak semua $y \in \mathbb{Z}$ memiliki prapeta. Salah satu *counterexample*-nya adalah $y = -1$. Tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = -1$,

Solusi:

1. f tidak surjektif karena $x \in B$ tidak memiliki prapeta, atau tidak ada $a \in A$ yang memenuhi $f(a) = x$.
2. f surjektif karena semua $b \in B$ memiliki prapeta. Kita memiliki $u = f(2)$, $v = f(3)$, dan $w = f(1)$.
3. f tidak surjektif karena tidak semua $y \in \mathbb{Z}$ memiliki prapeta. Salah satu *counterexample*-nya adalah $y = -1$. Tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = -1$, karena hal ini memberikan $x^2 + 1 = -1 \Rightarrow x^2 = -2$.

Solusi:

1. f tidak surjektif karena $x \in B$ tidak memiliki prapeta, atau tidak ada $a \in A$ yang memenuhi $f(a) = x$.
2. f surjektif karena semua $b \in B$ memiliki prapeta. Kita memiliki $u = f(2)$, $v = f(3)$, dan $w = f(1)$.
3. f tidak surjektif karena tidak semua $y \in \mathbb{Z}$ memiliki prapeta. Salah satu *counterexample*-nya adalah $y = -1$. Tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = -1$, karena hal ini memberikan $x^2 + 1 = -1 \Rightarrow x^2 = -2$.
4. f surjektif karena setiap $y \in \mathbb{Z}$ memiliki prapeta. Untuk setiap $y \in \mathbb{Z}$ kita dapat memilih $x =$

Solusi:

1. f tidak surjektif karena $x \in B$ tidak memiliki prapeta, atau tidak ada $a \in A$ yang memenuhi $f(a) = x$.
2. f surjektif karena semua $b \in B$ memiliki prapeta. Kita memiliki $u = f(2)$, $v = f(3)$, dan $w = f(1)$.
3. f tidak surjektif karena tidak semua $y \in \mathbb{Z}$ memiliki prapeta. Salah satu *counterexample*-nya adalah $y = -1$. Tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = -1$, karena hal ini memberikan $x^2 + 1 = -1 \Rightarrow x^2 = -2$.
4. f surjektif karena setiap $y \in \mathbb{Z}$ memiliki prapeta. Untuk setiap $y \in \mathbb{Z}$ kita dapat memilih $x = y + 1$ sehingga $f(x) = f(y + 1) = (y + 1) - 1 = y$.

Bahasan

Fungsi Bijektif

Definisi (Fungsi Bijektif)

Misalkan $f : A \rightarrow B$ adalah sebuah fungsi, f dikatakan bijektif (korespondensi satu-satu) apabila f injektif dan surjektif sekaligus. Apabila f fungsi bijektif, maka f dikatakan sebagai suatu bijeksi.

Contoh Fungsi Bijektif

Contoh

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Fungsi $f : A \to B$ yang didefinisikan sebagai

$$f(a) = 4,\ f(b) = 1,\ f(c) = 3, \text{ dan } f(d) = 2$$

merupakan fungsi bijektif karena f injektif dan surjektif. Fungsi f injektif karena tidak ada $x, y \in A$ dengan sifat $f(x) = f(y)$ tetapi $x \neq y$. Kemudian f surjektif karena setiap $y \in B$ memiliki prapeta/ pra-bayangan (*preimage*). Kita memiliki $1 = f(b)$, $2 = f(d)$, $3 = f(c)$, dan $4 = f(a)$.

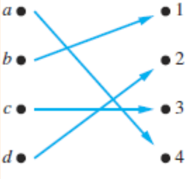
Contoh Fungsi Bijektif

Contoh

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Fungsi $f : A \to B$ yang didefinisikan sebagai

$$f(a) = 4,\ f(b) = 1,\ f(c) = 3, \text{ dan } f(d) = 2$$

merupakan fungsi bijektif karena f injektif dan surjektif. Fungsi f injektif karena tidak ada $x, y \in A$ dengan sifat $f(x) = f(y)$ tetapi $x \neq y$. Kemudian f surjektif karena setiap $y \in B$ memiliki prapeta/ pra-bayangan (*preimage*). Kita memiliki $1 = f(b)$, $2 = f(d)$, $3 = f(c)$, dan $4 = f(a)$.



Latihan

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut bersifat bijektif atau tidak.

1. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$
2. $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v\}$ serta $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$.
4. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = 2x$.

Solusi:

1. Kita memiliki $f(1) = u$, $f(2) = w$, dan $f(3) = v$. Tidak ada $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ tetapi $f(a_1) = f(a_2)$, sehingga f injektif. Kemudian untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sehingga $b = f(a)$, akibatnya f surjektif. Karena f injektif dan surjektif, maka f bijektif.

Solusi:

1. Kita memiliki $f(1) = u$, $f(2) = w$, dan $f(3) = v$. Tidak ada $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ tetapi $f(a_1) = f(a_2)$, sehingga f injektif. Kemudian untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sehingga $b = f(a)$, akibatnya f surjektif. Karena f injektif dan surjektif, maka f bijektif.
2. f tidak bijektif karena f tidak injektif. Kita memiliki $1 \neq 2$ tetapi $f(1) = f(2) = u$.

Solusi:

1. Kita memiliki $f(1) = u$, $f(2) = w$, dan $f(3) = v$. Tidak ada $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ tetapi $f(a_1) = f(a_2)$, sehingga f injektif. Kemudian untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sehingga $b = f(a)$, akibatnya f surjektif. Karena f injektif dan surjektif, maka f bijektif.
2. f tidak bijektif karena f tidak injektif. Kita memiliki $1 \neq 2$ tetapi $f(1) = f(2) = u$.
3. f injektif karena: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Kemudian f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{Z}$ kita dapat memilih $x = y + 1$ sehingga $f(x) = f(y+1) = y + 1 - 1 = y$. Akibatnya f bijektif.

Solusi:

1. Kita memiliki $f(1) = u$, $f(2) = w$, dan $f(3) = v$. Tidak ada $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ tetapi $f(a_1) = f(a_2)$, sehingga f injektif. Kemudian untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sehingga $b = f(a)$, akibatnya f surjektif. Karena f injektif dan surjektif, maka f bijektif.
2. f tidak bijektif karena f tidak injektif. Kita memiliki $1 \neq 2$ tetapi $f(1) = f(2) = u$.
3. f injektif karena: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Kemudian f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{Z}$ kita dapat memilih $x = y + 1$ sehingga $f(x) = f(y+1) = y + 1 - 1 = y$. Akibatnya f bijektif.
4. f tidak bijektif karena f tidak surjektif. Tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 1$. Jika ada $x \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(x) = 1$, maka kita memiliki $f(x) = 2x = 1$, sehingga $x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

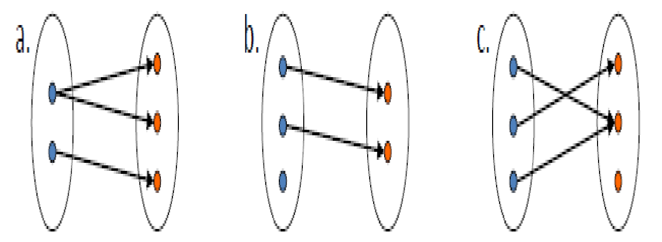
Bahasan

2. Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif
   - Fungsi Injektif
   - Fungsi Surjektif
   - Fungsi Bijektif
   - Latihan: Fungsi Injektif, Surjektif, dan Bijektif

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?

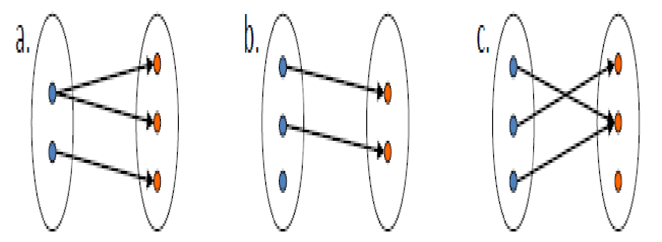


Solusi:

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?



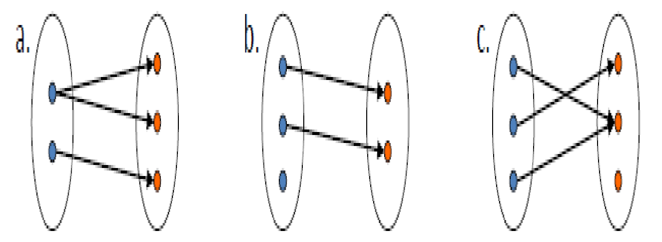
Solusi:

- Relasi pada a. bukan merupakan fungsi.

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?



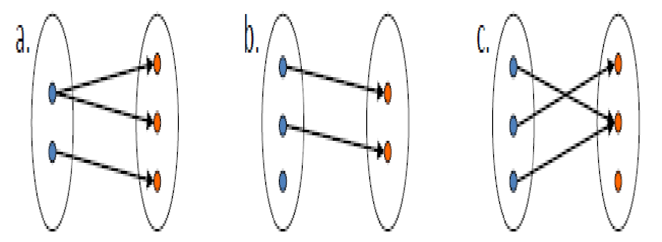
Solusi:

- Relasi pada a. bukan merupakan fungsi.
- Relasi pada b. bukan merupakan fungsi (total), namun merupakan fungsi parsial yang bersifat bijektif.

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?



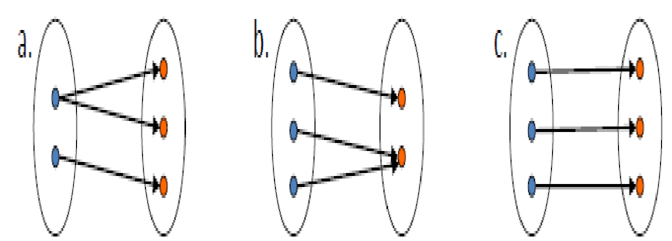
Solusi:

- Relasi pada a. bukan merupakan fungsi.
- Relasi pada b. bukan merupakan fungsi (total), namun merupakan fungsi parsial yang bersifat bijektif.
- Relasi pada c. adalah fungsi yang tidak injektif dan tidak surjektif.

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?

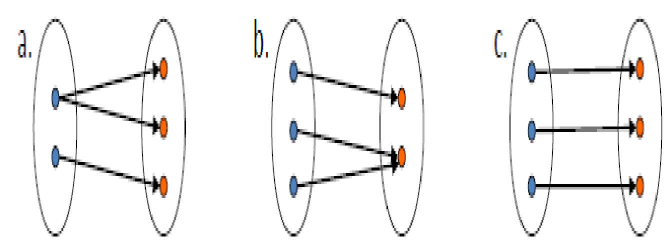


Solusi:

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?



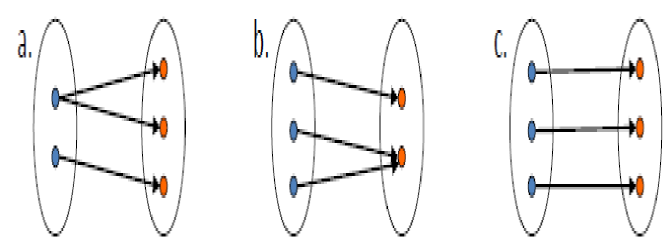
Solusi:

- Relasi pada a. bukan merupakan fungsi.

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?



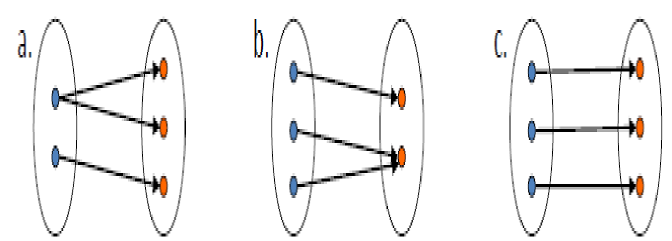
Solusi:

- Relasi pada a. bukan merupakan fungsi.
- Relasi pada b. adalah fungsi surjektif, namun tidak injektif.

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?



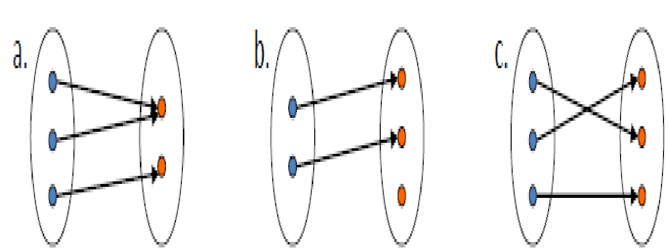
Solusi:

- Relasi pada a. bukan merupakan fungsi.
- Relasi pada b. adalah fungsi surjektif, namun tidak injektif.
- Relasi pada c. adalah fungsi bijektif.

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?

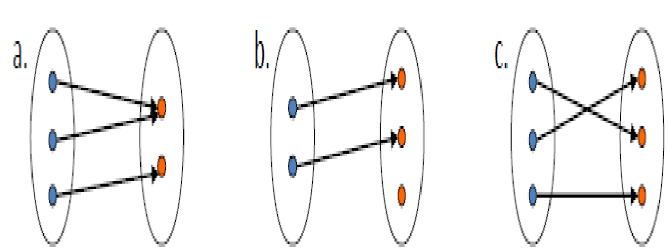


Solusi:

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?



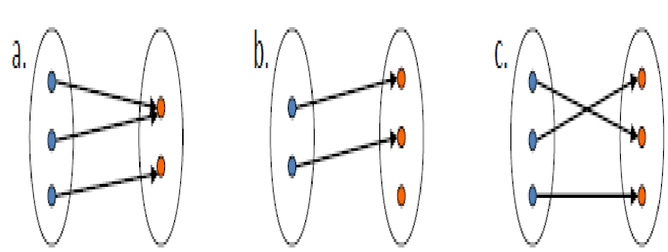
Solusi:

- Relasi pada a. adalah fungsi surjektif, namun tidak injektif.

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?



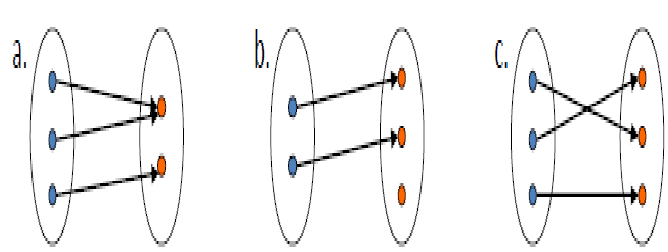
Solusi:

- Relasi pada a. adalah fungsi surjektif, namun tidak injektif.
- Relasi pada b. adalah fungsi injektif, namun tidak surjektif.

Latihan

Latihan

Mana relasi yang merupakan fungsi injektif, surjektif, dan bijektif?



Solusi:

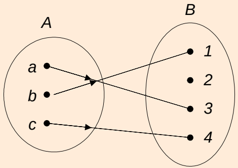
- Relasi pada a. adalah fungsi surjektif, namun tidak injektif.
- Relasi pada b. adalah fungsi injektif, namun tidak surjektif.
- Relasi pada c. adalah fungsi total bijektif.

Latihan

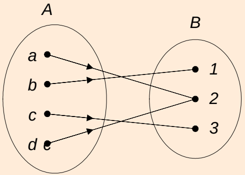
Latihan

Periksa apakah relasi f yang digambarkan dengan diagram panah berikut merupakan fungsi? Jika ya, tentukan apakah f injektif, surjektif, ataupun bijektif.

1. f adalah relasi berikut:



2. f adalah relasi berikut:



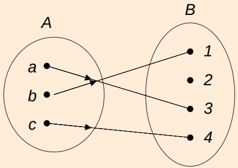
Solusi:

Latihan

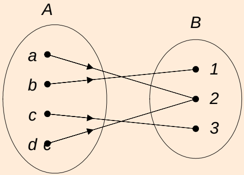
Latihan

Periksa apakah relasi f yang digambarkan dengan diagram panah berikut merupakan fungsi? Jika ya, tentukan apakah f injektif, surjektif, ataupun bijektif.

1. 1. f adalah relasi berikut:



2. f adalah relasi berikut:



Solusi:

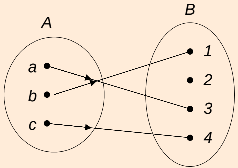
1. f merupakan fungsi dari A ke B dengan sifat injektif (karena peta dari setiap $x \in A$ berbeda) namun tidak surjektif karena $2 \in B$ tidak memiliki prapeta. Akibatnya f tidak bijektif.

Latihan

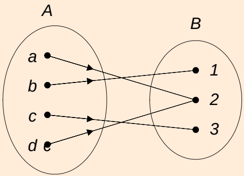
Latihan

Periksa apakah relasi f yang digambarkan dengan diagram panah berikut merupakan fungsi? Jika ya, tentukan apakah f injektif, surjektif, ataupun bijektif.

1. 1. f adalah relasi berikut:



2. f adalah relasi berikut:



Solusi:

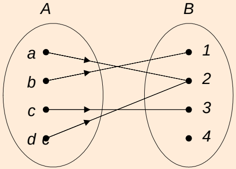
1. f merupakan fungsi dari A ke B dengan sifat injektif (karena peta dari setiap $x \in A$ berbeda) namun tidak surjektif karena $2 \in B$ tidak memiliki prapeta. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f merupakan fungsi dari A ke B dengan sifat surjektif (karena setiap $y \in B$ memiliki prapeta) namun tidak injektif karena $f(a) = f(d) = 2$. Akibatnya f tidak bijektif.

Latihan

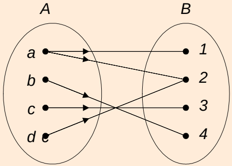
Latihan

Periksa apakah relasi f yang digambarkan dengan diagram panah berikut merupakan fungsi? Jika ya, tentukan apakah f injektif, surjektif, ataupun bijektif.

1. f adalah relasi berikut:



2. f adalah relasi berikut:



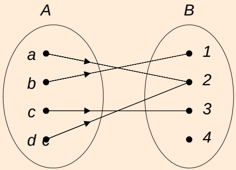
Solusi:

Latihan

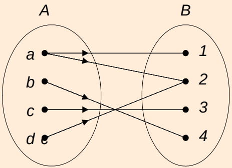
Latihan

Periksa apakah relasi f yang digambarkan dengan diagram panah berikut merupakan fungsi? Jika ya, tentukan apakah f injektif, surjektif, ataupun bijektif.

1. f adalah relasi berikut:



2. f adalah relasi berikut:



Solusi:

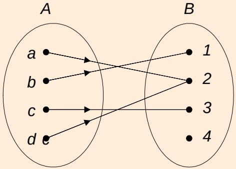
1. f bukan fungsi injektif karena $f(a) = f(d) = 2$. Kemudian f bukan fungsi surjektif karena $4 \in B$ tidak mempunyai prapeta. Akibatnya f tidak bijektif.

Latihan

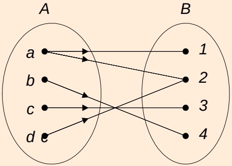
Latihan

Periksa apakah relasi f yang digambarkan dengan diagram panah berikut merupakan fungsi? Jika ya, tentukan apakah f injektif, surjektif, ataupun bijektif.

1. f adalah relasi berikut:



2. f adalah relasi berikut:



Solusi:

1. f bukan fungsi injektif karena $f(a) = f(d) = 2$. Kemudian f bukan fungsi surjektif karena $4 \in B$ tidak mempunyai prapeta. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f bukan fungsi, karena $(a, 1) \in f$ dan $(a, 2) \in f$. Akibatnya f bukan fungsi injektif, surjektif, maupun bijektif.

Latihan

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut injektif, surjektif, bijektif, atau tidak ketiganya.

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = 2x + 3$.
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ dengan $f(x) = |x|$, notasi $|x|$ menyatakan nilai mutlak dari x.
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 2$.
4. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dengan $f(x) = 2x + 1$.

Solusi:

1. f injektif.

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa:
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa:
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow$

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa:
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow$

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa:
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif.

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$.

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa:
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$,

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$, sehingga $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Akibatnya f tidak bijektif.

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$, sehingga $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = |-1| = |1| = 1$.

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$, sehingga $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = |-1| = |1| = 1$. Fungsi f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{N}_0$ terdapat $x = y \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(x) = |x| = x = y$. Akibatnya f tidak bijektif.

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa:
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$, sehingga $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = |-1| = |1| = 1$. Fungsi f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{N}_0$ terdapat $x = y \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(x) = |x| = x = y$. Akibatnya f tidak bijektif.
3. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = 3$.

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$, sehingga $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = |-1| = |1| = 1$. Fungsi f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{N}_0$ terdapat $x = y \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(x) = |x| = x = y$. Akibatnya f tidak bijektif.
3. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = 3$. Kemudian f tidak surjektif karena tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$.

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$, sehingga $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = |-1| = |1| = 1$. Fungsi f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{N}_0$ terdapat $x = y \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(x) = |x| = x = y$. Akibatnya f tidak bijektif.
3. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = 3$. Kemudian f tidak surjektif karena tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$, hal ini tidak mungkin dipenuhi oleh $x \in \mathbb{Z}$ apa pun.

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$, sehingga $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = |-1| = |1| = 1$. Fungsi f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{N}_0$ terdapat $x = y \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(x) = |x| = x = y$. Akibatnya f tidak bijektif.
3. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = 3$. Kemudian f tidak surjektif karena tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$, hal ini tidak mungkin dipenuhi oleh $x \in \mathbb{Z}$ apa pun.
4. f injektif karena $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$, sehingga $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = |-1| = |1| = 1$. Fungsi f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{N}_0$ terdapat $x = y \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(x) = |x| = x = y$. Akibatnya f tidak bijektif.
3. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = 3$. Kemudian f tidak surjektif karena tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$, hal ini tidak mungkin dipenuhi oleh $x \in \mathbb{Z}$ apa pun.
4. f injektif karena $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Kemudian f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{Q}$, kita dapat memilih $x =$

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$, sehingga $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = |-1| = |1| = 1$. Fungsi f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{N}_0$ terdapat $x = y \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(x) = |x| = x = y$. Akibatnya f tidak bijektif.
3. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = 3$. Kemudian f tidak surjektif karena tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$, hal ini tidak mungkin dipenuhi oleh $x \in \mathbb{Z}$ apa pun.
4. f injektif karena $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Kemudian f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{Q}$, kita dapat memilih $x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{Q}$, yang memenuhi $f(x) =$

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$, sehingga $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = |-1| = |1| = 1$. Fungsi f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{N}_0$ terdapat $x = y \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(x) = |x| = x = y$. Akibatnya f tidak bijektif.
3. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = 3$. Kemudian f tidak surjektif karena tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$, hal ini tidak mungkin dipenuhi oleh $x \in \mathbb{Z}$ apa pun.
4. f injektif karena $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Kemudian f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{Q}$, kita dapat memilih $x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{Q}$, yang memenuhi $f(x) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) =$

Solusi:

1. f injektif. Tinjau bahwa: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = 2x + 3 = 0$, sehingga $x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$. Akibatnya f tidak bijektif.
2. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = |-1| = |1| = 1$. Fungsi f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{N}_0$ terdapat $x = y \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(x) = |x| = x = y$. Akibatnya f tidak bijektif.
3. f tidak injektif karena $f(-1) = f(1) = 3$. Kemudian f tidak surjektif karena tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Andaikan ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$, maka diperoleh $f(x) = x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$, hal ini tidak mungkin dipenuhi oleh $x \in \mathbb{Z}$ apa pun.
4. f injektif karena $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Kemudian f surjektif karena untuk setiap $y \in \mathbb{Q}$, kita dapat memilih $x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{Q}$, yang memenuhi $f(x) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y - 1 + 1 = y$. Akibatnya f bijektif.

Challenging Problem

Latihan

Periksa apakah fungsi-fungsi berikut injektif, surjektif, bijektif, atau tidak ketiganya.

1. $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dengan $f(x) = \frac{x}{x-1}$.
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{jika } x \leq 1 \\ 4x+3, & \text{jika } x > 1. \end{cases}$.
3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{jika } x > 1 \\ 4x+3, & \text{jika } x \leq 1. \end{cases}$.

Bahasan

Komposisi Fungsi

Definisi

Misalkan A, B, C adalah tiga himpunan, $f : A \to B$ dan $g : B \to C$. Komposisi fungsi dari g dan f adalah fungsi $g \circ f : A \to C$ yang didefinisikan sebagai

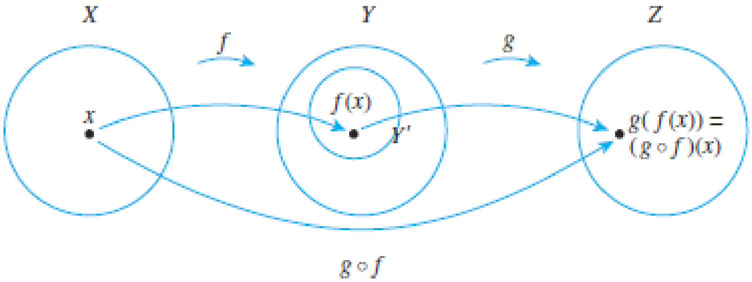
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

untuk setiap $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Agar $g \circ f$ terdefinisi, haruslah $\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$.

Ilustrasi Komposisi Fungsi

Misalkan $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah dua fungsi dengan $\operatorname{ran}(f) = Y' \subseteq Y$, sehingga $\operatorname{ran}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$. Komposisi fungsi $g \circ f$ diilustrasikan sebagai berikut.



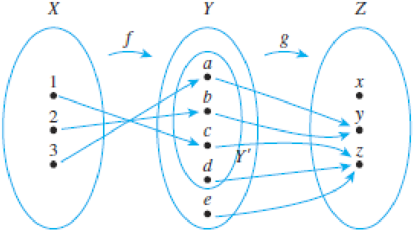
Kita memiliki $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ untuk setiap $x \in X$.

Contoh Komposisi Fungsi

Misalkan $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$, dan $Z = \{x, y, z\}$. Misalkan pula $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah dua fungsi dengan definisi berikut:
$f = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}$ dan
$g = \{(a, y), (b, y), (c, z), (d, z), (e, z)\}$.
Kita memiliki ilustrasi berikut:

Contoh Komposisi Fungsi

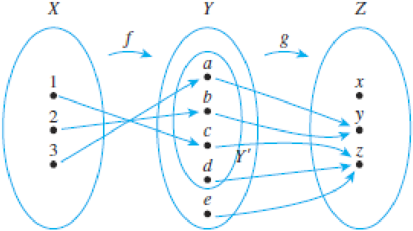
Misalkan $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$, dan $Z = \{x, y, z\}$. Misalkan pula $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah dua fungsi dengan definisi berikut:
$f = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}$ dan
$g = \{(a, y), (b, y), (c, z), (d, z), (e, z)\}$.
Kita memiliki ilustrasi berikut:



Perhatikan bahwa
$(g \circ f)(1) =$

Contoh Komposisi Fungsi

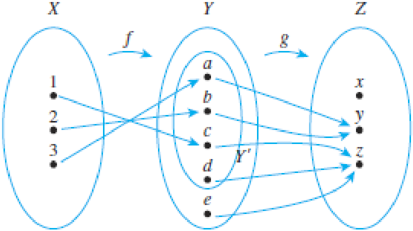
Misalkan $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$, dan $Z = \{x, y, z\}$. Misalkan pula $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah dua fungsi dengan definisi berikut:
$f = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}$ dan
$g = \{(a, y), (b, y), (c, z), (d, z), (e, z)\}$.
Kita memiliki ilustrasi berikut:



Perhatikan bahwa
$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(c) = z$,
$(g \circ f)(2) =$

Contoh Komposisi Fungsi

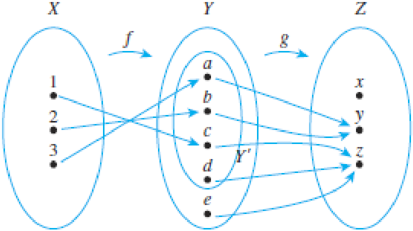
Misalkan $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$, dan $Z = \{x, y, z\}$. Misalkan pula $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah dua fungsi dengan definisi berikut:
$f = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}$ dan
$g = \{(a, y), (b, y), (c, z), (d, z), (e, z)\}$.
Kita memiliki ilustrasi berikut:



Perhatikan bahwa
$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(c) = z$,
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = y$, dan
$(g \circ f)(3) =$

Contoh Komposisi Fungsi

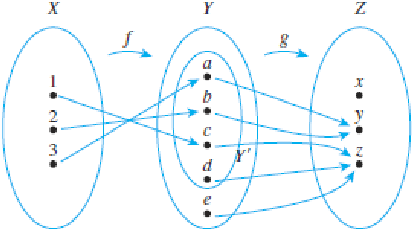
Misalkan $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$, dan $Z = \{x, y, z\}$. Misalkan pula $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah dua fungsi dengan definisi berikut:
$f = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}$ dan
$g = \{(a, y), (b, y), (c, z), (d, z), (e, z)\}$.
Kita memiliki ilustrasi berikut:



Perhatikan bahwa
$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(c) = z$,
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = y$, dan
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(a) = y$.
Sehingga $g \circ f =$

Contoh Komposisi Fungsi

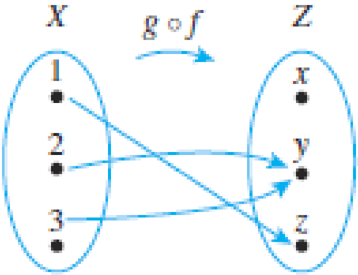
Misalkan $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$, dan $Z = \{x, y, z\}$. Misalkan pula $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah dua fungsi dengan definisi berikut:
$f = \{(1, c), (2, b), (3, a)\}$ dan
$g = \{(a, y), (b, y), (c, z), (d, z), (e, z)\}$.
Kita memiliki ilustrasi berikut:



Perhatikan bahwa
$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(c) = z$,
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = y$, dan
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(a) = y$.
Sehingga $g \circ f = \{(1, z), (2, y), (3, y)\}$.

Perhatikan bahwa $g \circ f$ adalah fungsi dari X ke Z dengan $\operatorname{ran}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g \circ f) = \{y, z\}$.

Perhatikan bahwa $g \circ f$ adalah fungsi dari X ke Z dengan $\operatorname{ran}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g \circ f) = \{y, z\}$.



Latihan

Latihan

Jika mungkin, fungsi-fungsi komposisi berikut.

1. $f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ dengan $f(a) = b,\ f(b) = c,\ f(c) = a$ dan $g : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ dengan $g(a) = 1,\ g(b) = 2,\ g(c) = 3.$ Tentukan $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, $g \circ f$, dan $f \circ g$.
2. $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2$, tentukan formula untuk $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$.
3. $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x$ dan $g(x) = 1$, tentukan formula untuk $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$.
4. $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = 1$ dan $g(x) = 2$, tentukan formula untuk $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$.
5. $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dengan $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = \frac{x+1}{2}$, tentukan formula untuk $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$.

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$.

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$. Selanjutnya $f \circ f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f \circ f)(a) = a$, $(f \circ f \circ f)(b) = b$, $(f \circ f \circ f)(c) = c$.

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$. Selanjutnya $f \circ f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f \circ f)(a) = a$, $(f \circ f \circ f)(b) = b$, $(f \circ f \circ f)(c) = c$. Kemudian $g \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(g \circ f)(a) = 2$, $(g \circ f)(b) = 3$, $(g \circ f)(c) = 1$.

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$. Selanjutnya $f \circ f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f \circ f)(a) = a$, $(f \circ f \circ f)(b) = b$, $(f \circ f \circ f)(c) = c$. Kemudian $g \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(g \circ f)(a) = 2$, $(g \circ f)(b) = 3$, $(g \circ f)(c) = 1$. Terakhir karena $\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c\}$ dan $\mathrm{ran}(g) = \{1, 2, 3\}$, maka $f \circ g$ tidak didefinisikan.
2. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$. Selanjutnya $f \circ f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f \circ f)(a) = a$, $(f \circ f \circ f)(b) = b$, $(f \circ f \circ f)(c) = c$. Kemudian $g \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(g \circ f)(a) = 2$, $(g \circ f)(b) = 3$, $(g \circ f)(c) = 1$. Terakhir karena $\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c\}$ dan $\mathrm{ran}(g) = \{1, 2, 3\}$, maka $f \circ g$ tidak didefinisikan.
2. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 1 = x^2 - 1$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$. Selanjutnya $f \circ f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f \circ f)(a) = a$, $(f \circ f \circ f)(b) = b$, $(f \circ f \circ f)(c) = c$. Kemudian $g \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(g \circ f)(a) = 2$, $(g \circ f)(b) = 3$, $(g \circ f)(c) = 1$. Terakhir karena $\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c\}$ dan $\mathrm{ran}(g) = \{1, 2, 3\}$, maka $f \circ g$ tidak didefinisikan.
2. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 1 = x^2 - 1$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
3. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$. Selanjutnya $f \circ f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f \circ f)(a) = a$, $(f \circ f \circ f)(b) = b$, $(f \circ f \circ f)(c) = c$. Kemudian $g \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(g \circ f)(a) = 2$, $(g \circ f)(b) = 3$, $(g \circ f)(c) = 1$. Terakhir karena $\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c\}$ dan $\mathrm{ran}(g) = \{1, 2, 3\}$, maka $f \circ g$ tidak didefinisikan.
2. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 1 = x^2 - 1.$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1.$
3. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) = 1.$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$. Selanjutnya $f \circ f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f \circ f)(a) = a$, $(f \circ f \circ f)(b) = b$, $(f \circ f \circ f)(c) = c$. Kemudian $g \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(g \circ f)(a) = 2$, $(g \circ f)(b) = 3$, $(g \circ f)(c) = 1$. Terakhir karena $\operatorname{dom}(f) = \{a, b, c\}$ dan $\operatorname{ran}(g) = \{1, 2, 3\}$, maka $f \circ g$ tidak didefinisikan.
2. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 1 = x^2 - 1.$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$
3. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) = 1.$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1.$
4. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$. Selanjutnya $f \circ f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f \circ f)(a) = a$, $(f \circ f \circ f)(b) = b$, $(f \circ f \circ f)(c) = c$. Kemudian $g \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(g \circ f)(a) = 2$, $(g \circ f)(b) = 3$, $(g \circ f)(c) = 1$. Terakhir karena $\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c\}$ dan $\mathrm{ran}(g) = \{1, 2, 3\}$, maka $f \circ g$ tidak didefinisikan.
2. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 1 = x^2 - 1$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
3. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) = 1$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1$.
4. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$. Selanjutnya $f \circ f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f \circ f)(a) = a$, $(f \circ f \circ f)(b) = b$, $(f \circ f \circ f)(c) = c$. Kemudian $g \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(g \circ f)(a) = 2$, $(g \circ f)(b) = 3$, $(g \circ f)(c) = 1$. Terakhir karena $\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c\}$ dan $\mathrm{ran}(g) = \{1, 2, 3\}$, maka $f \circ g$ tidak didefinisikan.
2. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 1 = x^2 - 1.$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$
3. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) = 1.$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1.$
4. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1.$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2.$
5. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$. Selanjutnya $f \circ f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f \circ f)(a) = a$, $(f \circ f \circ f)(b) = b$, $(f \circ f \circ f)(c) = c$. Kemudian $g \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(g \circ f)(a) = 2$, $(g \circ f)(b) = 3$, $(g \circ f)(c) = 1$. Terakhir karena $\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c\}$ dan $\mathrm{ran}(g) = \{1, 2, 3\}$, maka $f \circ g$ tidak didefinisikan.
2. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 1 = x^2 - 1$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
3. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) = 1$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1$.
4. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2$.
5. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x + 1 - 1 = x$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

Solusi:

1. Kita memiliki $f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f)(a) = c$, $(f \circ f)(b) = a$, $(f \circ f)(c) = b$. Selanjutnya $f \circ f \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(f \circ f \circ f)(a) = a$, $(f \circ f \circ f)(b) = b$, $(f \circ f \circ f)(c) = c$. Kemudian $g \circ f$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut: $(g \circ f)(a) = 2$, $(g \circ f)(b) = 3$, $(g \circ f)(c) = 1$. Terakhir karena $\operatorname{dom}(f) = \{a, b, c\}$ dan $\operatorname{ran}(g) = \{1, 2, 3\}$, maka $f \circ g$ tidak didefinisikan.
2. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 1 = x^2 - 1.$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$
3. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) = 1.$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1.$
4. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1.$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2.$
5. Kita memiliki
   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x + 1 - 1 = x.$
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2} = \frac{(2x-1)+1}{2} = \frac{2x}{2} = x.$

Bahasan

Fungsi Invers

Definisi

Misalkan $f : A \to B$ adalah sebuah fungsi bijektif. Fungsi invers (fungsi balikan) dari f adalah fungsi $f^{-1} : B \to A$ sedemikan hingga

$$\begin{aligned} \left(f^{-1} \circ f\right)(a) &= f^{-1}(f(a)) = a, \\ \left(f \circ f^{-1}\right)(b) &= f\left(f^{-1}(b)\right) = b, \end{aligned}$$

untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$. Jika f memiliki invers, maka f juga dikatakan *invertible*.

INGAT: syarat agar fungsi $f : A \to B$ memiliki invers adalah f bersifat **bijektif** (berupa korespondensi satu-satu). Jika $f : A \to B$ tidak bijektif, maka f^{-1} tidak didefinisikan.

Contoh Fungsi Invers

Contoh

Misalkan $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$. Fungsi f bersifat bijektif (berupa korespondensi satu-satu). Kita memiliki $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$.

Contoh Fungsi Invers

Contoh

Misalkan $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$. Fungsi f bersifat bijektif (berupa korespondensi satu-satu). Kita memiliki $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$. Fungsi invers dari f adalah f^{-1} dengan sifat $\left(f \circ f^{-1}\right)(b) = b$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = a$ untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$. Kita memiliki

$$f^{-1}(u) =$$

Contoh Fungsi Invers

Contoh

Misalkan $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$. Fungsi f bersifat bijektif (berupa korespondensi satu-satu). Kita memiliki $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$. Fungsi invers dari f adalah f^{-1} dengan sifat $\left(f \circ f^{-1}\right)(b) = b$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = a$ untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$. Kita memiliki

$$f^{-1}(u) = 2,\ f^{-1}(v) =$$

Contoh Fungsi Invers

Contoh

Misalkan $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$. Fungsi f bersifat bijektif (berupa korespondensi satu-satu). Kita memiliki $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$. Fungsi invers dari f adalah f^{-1} dengan sifat $\left(f \circ f^{-1}\right)(b) = b$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = a$ untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$. Kita memiliki

$$f^{-1}(u) = 2,\ f^{-1}(v) = 3,\ \text{dan}\ f^{-1}(w) =$$

Contoh Fungsi Invers

Contoh

Misalkan $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$. Fungsi f bersifat bijektif (berupa korespondensi satu-satu). Kita memiliki $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$. Fungsi invers dari f adalah f^{-1} dengan sifat $\left(f \circ f^{-1}\right)(b) = b$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = a$ untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$. Kita memiliki

$$f^{-1}(u) = 2,\ f^{-1}(v) = 3, \text{ dan } f^{-1}(w) = 1.$$

Tinjau bahwa

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(u) \quad =$$

Contoh Fungsi Invers

Contoh

Misalkan $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$. Fungsi f bersifat bijektif (berupa korespondensi satu-satu). Kita memiliki $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$. Fungsi invers dari f adalah f^{-1} dengan sifat $\left(f \circ f^{-1}\right)(b) = b$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = a$ untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$. Kita memiliki

$$f^{-1}(u) = 2,\ f^{-1}(v) = 3,\ \text{dan}\ f^{-1}(w) = 1.$$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}\left(f \circ f^{-1}\right)(u) &= f\left(f^{-1}(u)\right) = f(2) = u, \\ \left(f \circ f^{-1}\right)(v) &= \end{aligned}$$

Contoh Fungsi Invers

Contoh

Misalkan $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$. Fungsi f bersifat bijektif (berupa korespondensi satu-satu). Kita memiliki $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$. Fungsi invers dari f adalah f^{-1} dengan sifat $\left(f \circ f^{-1}\right)(b) = b$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = a$ untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$. Kita memiliki

$$f^{-1}(u) = 2,\ f^{-1}(v) = 3, \text{ dan } f^{-1}(w) = 1.$$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}
\left(f \circ f^{-1}\right)(u) &= f\left(f^{-1}(u)\right) = f(2) = u, \\
\left(f \circ f^{-1}\right)(v) &= f\left(f^{-1}(v)\right) = f(3) = v, \\
\left(f \circ f^{-1}\right)(w) &=
\end{aligned}$$

Contoh Fungsi Invers

Contoh

Misalkan $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$. Fungsi f bersifat bijektif (berupa korespondensi satu-satu). Kita memiliki $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$. Fungsi invers dari f adalah f^{-1} dengan sifat $\left(f \circ f^{-1}\right)(b) = b$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = a$ untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$. Kita memiliki

$$f^{-1}(u) = 2,\ f^{-1}(v) = 3, \text{ dan } f^{-1}(w) = 1.$$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}
\left(f \circ f^{-1}\right)(u) &= f\left(f^{-1}(u)\right) = f(2) = u, \\
\left(f \circ f^{-1}\right)(v) &= f\left(f^{-1}(v)\right) = f(3) = v, \\
\left(f \circ f^{-1}\right)(w) &= f\left(f^{-1}(w)\right) = f(1) = w,
\end{aligned}$$

dengan cara serupa, kita juga dapat membuktikan bahwa

Contoh Fungsi Invers

Contoh

Misalkan $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{u, v, w\}$ serta $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$. Fungsi f bersifat bijektif (berupa korespondensi satu-satu). Kita memiliki $f(1) = w$, $f(2) = u$, dan $f(3) = v$. Fungsi invers dari f adalah f^{-1} dengan sifat $\left(f \circ f^{-1}\right)(b) = b$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(a) = a$ untuk setiap $a \in A$ dan $b \in B$. Kita memiliki

$$f^{-1}(u) = 2,\ f^{-1}(v) = 3, \text{ dan } f^{-1}(w) = 1.$$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}
\left(f \circ f^{-1}\right)(u) &= f\left(f^{-1}(u)\right) = f(2) = u, \\
\left(f \circ f^{-1}\right)(v) &= f\left(f^{-1}(v)\right) = f(3) = v, \\
\left(f \circ f^{-1}\right)(w) &= f\left(f^{-1}(w)\right) = f(1) = w,
\end{aligned}$$

dengan cara serupa, kita juga dapat membuktikan bahwa $\left(f^{-1} \circ f\right)(1) = 1$, $\left(f^{-1} \circ f\right)(2) = 2$, dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(3) = 3$.

Latihan

Latihan

Tentukan (jika ada) invers dari fungsi-fungsi berikut.

1. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x - 1$.
2. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$.
3. $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}$ dengan $f(x) = \frac{x-1}{x}$.
4. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = 2x$.

Solusi:

1. f bijektif karena f injektif dan surjektif (buktikan!). Jika $f(x) = x - 1 = y$, maka $x =$

Solusi:

1. f bijektif karena f injektif dan surjektif (buktikan!). Jika $f(x) = x - 1 = y$, maka $x = y + 1$, akibatnya $f^{-1}(y) =$

Solusi:

1. f bijektif karena f injektif dan surjektif (buktikan!). Jika $f(x) = x - 1 = y$, maka $x = y + 1$, akibatnya $f^{-1}(y) = y + 1$, sehingga $f^{-1}(x) =$

Solusi:

1. f bijektif karena f injektif dan surjektif (buktikan!). Jika $f(x) = x - 1 = y$, maka $x = y + 1$, akibatnya $f^{-1}(y) = y + 1$, sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$. Tinjau bahwa $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(x+1) = (x+1) - 1 = x$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x-1) = (x-1) + 1 = x$.

Solusi:

1. f bijektif karena f injektif dan surjektif (buktikan!). Jika $f(x) = x - 1 = y$, maka $x = y + 1$, akibatnya $f^{-1}(y) = y + 1$, sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$. Tinjau bahwa $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(x+1) = (x+1) - 1 = x$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x-1) = (x-1) + 1 = x$.
2. f tidak bijektif karena f tidak injektif dan tidak pula surjektif. Kita memiliki $f(1) = f(-1) = 2$ dan tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Akibatnya f tidak memiliki invers.

Solusi:

1. f bijektif karena f injektif dan surjektif (buktikan!). Jika $f(x) = x - 1 = y$, maka $x = y + 1$, akibatnya $f^{-1}(y) = y + 1$, sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$. Tinjau bahwa $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(x+1) = (x+1) - 1 = x$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x-1) = (x-1) + 1 = x$.
2. f tidak bijektif karena f tidak injektif dan tidak pula surjektif. Kita memiliki $f(1) = f(-1) = 2$ dan tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Akibatnya f tidak memiliki invers.
3. f injektif karena
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

Solusi:

1. f bijektif karena f injektif dan surjektif (buktikan!). Jika $f(x) = x - 1 = y$, maka $x = y + 1$, akibatnya $f^{-1}(y) = y + 1$, sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$. Tinjau bahwa $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(x+1) = (x+1) - 1 = x$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x-1) = (x-1) + 1 = x$.
2. f tidak bijektif karena f tidak injektif dan tidak pula surjektif. Kita memiliki $f(1) = f(-1) = 2$ dan tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Akibatnya f tidak memiliki invers.
3. f injektif karena
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{x_2 - 1}{x_2} \Rightarrow$

Solusi:

1. f bijektif karena f injektif dan surjektif (buktikan!). Jika $f(x) = x - 1 = y$, maka $x = y + 1$, akibatnya $f^{-1}(y) = y + 1$, sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$. Tinjau bahwa $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(x+1) = (x+1) - 1 = x$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x-1) = (x-1) + 1 = x$.
2. f tidak bijektif karena f tidak injektif dan tidak pula surjektif. Kita memiliki $f(1) = f(-1) = 2$ dan tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Akibatnya f tidak memiliki invers.
3. f injektif karena
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{x_2 - 1}{x_2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x_1} = 1 - \frac{1}{x_2} \Rightarrow$

Solusi:

1. f bijektif karena f injektif dan surjektif (buktikan!). Jika $f(x) = x - 1 = y$, maka $x = y + 1$, akibatnya $f^{-1}(y) = y + 1$, sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$. Tinjau bahwa $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(x+1) = (x+1) - 1 = x$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x-1) = (x-1) + 1 = x$.
2. f tidak bijektif karena f tidak injektif dan tidak pula surjektif. Kita memiliki $f(1) = f(-1) = 2$ dan tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Akibatnya f tidak memiliki invers.
3. f injektif karena $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{x_2 - 1}{x_2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x_1} = 1 - \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif karena tidak terdapat x sehingga $f(x) = 1$.

Solusi:

1. f bijektif karena f injektif dan surjektif (buktikan!). Jika $f(x) = x - 1 = y$, maka $x = y + 1$, akibatnya $f^{-1}(y) = y + 1$, sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$. Tinjau bahwa $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(x+1) = (x+1) - 1 = x$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x-1) = (x-1) + 1 = x$.
2. f tidak bijektif karena f tidak injektif dan tidak pula surjektif. Kita memiliki $f(1) = f(-1) = 2$ dan tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Akibatnya f tidak memiliki invers.
3. f injektif karena $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{x_2 - 1}{x_2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x_1} = 1 - \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif karena tidak terdapat x sehingga $f(x) = 1$. Karena jika ada x yang memenuhi, maka haruslah $f(x) = \frac{x-1}{x} = 1$, sehingga $x - 1 = x$, akibatnya $-1 = 0$. Karena f tidak bijektif, maka f tidak memiliki invers.

Solusi:

1. f bijektif karena f injektif dan surjektif (buktikan!). Jika $f(x) = x - 1 = y$, maka $x = y + 1$, akibatnya $f^{-1}(y) = y + 1$, sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$. Tinjau bahwa $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(x+1) = (x+1) - 1 = x$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x-1) = (x-1) + 1 = x$.
2. f tidak bijektif karena f tidak injektif dan tidak pula surjektif. Kita memiliki $f(1) = f(-1) = 2$ dan tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 0$. Akibatnya f tidak memiliki invers.
3. f injektif karena $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{x_2 - 1}{x_2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x_1} = 1 - \frac{1}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Namun f tidak surjektif karena tidak terdapat x sehingga $f(x) = 1$. Karena jika ada x yang memenuhi, maka haruslah $f(x) = \frac{x-1}{x} = 1$, sehingga $x - 1 = x$, akibatnya $-1 = 0$. Karena f tidak bijektif, maka f tidak memiliki invers.
4. f tidak bijektif karena f tidak surjektif. Tidak terdapat $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $f(x) = 1$.

Bahasan

Fungsi Lantai (*Floor*) dan Fungsi Atap (*Ceiling*)

Definisi

Fungsi lantai (*floor*) memetakan bilangan real x ke bilangan bulat terbesar yang kurang atau sama dengan x. Fungsi lantai dinotasikan dengan $\lfloor \cdots \rfloor$. Secara formal untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ maka $\lfloor x \rfloor = n$ dengan $n \leq x < n + 1$.

Definisi

Fungsi atap (*ceiling*) memetakan bilangan real x ke bilangan bulat terkecil yang lebih besar ata sama dengan x. Fungsi atap dinotasikan dengan $\lceil \cdots \rceil$. Secara formal untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ maka $\lceil x \rceil = m$ dengan $m - 1 < x \leq m$.

Secara intuitif: $\lfloor x \rfloor$ membulatkan "ke bawah", sedangkan $\lceil x \rceil$ membulatkan "ke atas".

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil = 2$.
4. $\lfloor 1 \rfloor =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil = 2$.
4. $\lfloor 1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1 \rceil =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil = 2$.
4. $\lfloor 1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1 \rceil = 1$.
5. $\lfloor -3.5 \rfloor =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil = 2$.
4. $\lfloor 1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1 \rceil = 1$.
5. $\lfloor -3.5 \rfloor = -4$ dan $\lceil -3.5 \rceil =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil = 2$.
4. $\lfloor 1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1 \rceil = 1$.
5. $\lfloor -3.5 \rfloor = -4$ dan $\lceil -3.5 \rceil = -3$.
6. $\lfloor -2.7 \rfloor =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil = 2$.
4. $\lfloor 1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1 \rceil = 1$.
5. $\lfloor -3.5 \rfloor = -4$ dan $\lceil -3.5 \rceil = -3$.
6. $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil = 2$.
4. $\lfloor 1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1 \rceil = 1$.
5. $\lfloor -3.5 \rfloor = -4$ dan $\lceil -3.5 \rceil = -3$.
6. $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$.
7. $\lfloor -1.3 \rfloor =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil = 2$.
4. $\lfloor 1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1 \rceil = 1$.
5. $\lfloor -3.5 \rfloor = -4$ dan $\lceil -3.5 \rceil = -3$.
6. $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$.
7. $\lfloor -1.3 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.3 \rceil =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil = 2$.
4. $\lfloor 1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1 \rceil = 1$.
5. $\lfloor -3.5 \rfloor = -4$ dan $\lceil -3.5 \rceil = -3$.
6. $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$.
7. $\lfloor -1.3 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.3 \rceil = -1$.
8. $\lfloor -4 \rfloor =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil = 2$.
4. $\lfloor 1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1 \rceil = 1$.
5. $\lfloor -3.5 \rfloor = -4$ dan $\lceil -3.5 \rceil = -3$.
6. $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$.
7. $\lfloor -1.3 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.3 \rceil = -1$.
8. $\lfloor -4 \rfloor = -4$ dan $\lceil -4 \rceil =$

Contoh Fungsi Lantai dan Fungsi Atap

Contoh

Kita memiliki

1. $\lfloor 3.5 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.5 \rceil = 4$.
2. $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$ dan $\lceil 0.7 \rceil = 1$.
3. $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1.1 \rceil = 2$.
4. $\lfloor 1 \rfloor = 1$ dan $\lceil 1 \rceil = 1$.
5. $\lfloor -3.5 \rfloor = -4$ dan $\lceil -3.5 \rceil = -3$.
6. $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$.
7. $\lfloor -1.3 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.3 \rceil = -1$.
8. $\lfloor -4 \rfloor = -4$ dan $\lceil -4 \rceil = -4$.

Latihan

Latihan

Tentukan nilai-nilai berikut:

1) $\lfloor 2.8 \rfloor$ dan $\lceil 2.8 \rceil$
2) $\lfloor 3.1 \rfloor$ dan $\lceil 3.1 \rceil$
3) $\lfloor -1.4 \rfloor$ dan $\lceil -1.4 \rceil$
4) $\lfloor -2.7 \rfloor$ dan $\lceil -2.7 \rceil$
5) $\lfloor \pi \rfloor$ dan $\lceil \pi \rceil$
6) $\lfloor -\pi \rfloor$ dan $\lceil -\pi \rceil$
7) $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil \sqrt{2} \rceil$
8) $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -\sqrt{2} \rceil$
9) $\lfloor -3\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -3\sqrt{2} \rceil$
10) $\lfloor 2\sqrt{3} \rfloor$ dan $\lceil 2\sqrt{3} \rceil$

Solusi: **1)**

Latihan

Latihan

Tentukan nilai-nilai berikut:

1) $\lfloor 2.8 \rfloor$ dan $\lceil 2.8 \rceil$
2) $\lfloor 3.1 \rfloor$ dan $\lceil 3.1 \rceil$
3) $\lfloor -1.4 \rfloor$ dan $\lceil -1.4 \rceil$
4) $\lfloor -2.7 \rfloor$ dan $\lceil -2.7 \rceil$
5) $\lfloor \pi \rfloor$ dan $\lceil \pi \rceil$
6) $\lfloor -\pi \rfloor$ dan $\lceil -\pi \rceil$
7) $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil \sqrt{2} \rceil$
8) $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -\sqrt{2} \rceil$
9) $\lfloor -3\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -3\sqrt{2} \rceil$
10) $\lfloor 2\sqrt{3} \rfloor$ dan $\lceil 2\sqrt{3} \rceil$

Solusi: **1)** $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$ dan $\lceil 2.8 \rceil = 3$, **2)**

Latihan

Latihan

Tentukan nilai-nilai berikut:

1) $\lfloor 2.8 \rfloor$ dan $\lceil 2.8 \rceil$
2) $\lfloor 3.1 \rfloor$ dan $\lceil 3.1 \rceil$
3) $\lfloor -1.4 \rfloor$ dan $\lceil -1.4 \rceil$
4) $\lfloor -2.7 \rfloor$ dan $\lceil -2.7 \rceil$
5) $\lfloor \pi \rfloor$ dan $\lceil \pi \rceil$
6) $\lfloor -\pi \rfloor$ dan $\lceil -\pi \rceil$
7) $\left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil \sqrt{2} \right\rceil$
8) $\left\lfloor -\sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil -\sqrt{2} \right\rceil$
9) $\left\lfloor -3\sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil -3\sqrt{2} \right\rceil$
10) $\left\lfloor 2\sqrt{3} \right\rfloor$ dan $\left\lceil 2\sqrt{3} \right\rceil$

Solusi: **1)** $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$ dan $\lceil 2.8 \rceil = 3$, **2)** $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.1 \rceil = 4$, **3)**

Latihan

Latihan

Tentukan nilai-nilai berikut:

1) $\lfloor 2.8 \rfloor$ dan $\lceil 2.8 \rceil$
2) $\lfloor 3.1 \rfloor$ dan $\lceil 3.1 \rceil$
3) $\lfloor -1.4 \rfloor$ dan $\lceil -1.4 \rceil$
4) $\lfloor -2.7 \rfloor$ dan $\lceil -2.7 \rceil$
5) $\lfloor \pi \rfloor$ dan $\lceil \pi \rceil$
6) $\lfloor -\pi \rfloor$ dan $\lceil -\pi \rceil$
7) $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil \sqrt{2} \rceil$
8) $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -\sqrt{2} \rceil$
9) $\lfloor -3\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -3\sqrt{2} \rceil$
10) $\lfloor 2\sqrt{3} \rfloor$ dan $\lceil 2\sqrt{3} \rceil$

Solusi: **1)** $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$ dan $\lceil 2.8 \rceil = 3$, **2)** $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.1 \rceil = 4$, **3)** $\lfloor -1.4 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.4 \rceil = -1$, **4)**

Latihan

Latihan

Tentukan nilai-nilai berikut:

1) $\lfloor 2.8 \rfloor$ dan $\lceil 2.8 \rceil$
2) $\lfloor 3.1 \rfloor$ dan $\lceil 3.1 \rceil$
3) $\lfloor -1.4 \rfloor$ dan $\lceil -1.4 \rceil$
4) $\lfloor -2.7 \rfloor$ dan $\lceil -2.7 \rceil$
5) $\lfloor \pi \rfloor$ dan $\lceil \pi \rceil$
6) $\lfloor -\pi \rfloor$ dan $\lceil -\pi \rceil$
7) $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil \sqrt{2} \rceil$
8) $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -\sqrt{2} \rceil$
9) $\lfloor -3\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -3\sqrt{2} \rceil$
10) $\lfloor 2\sqrt{3} \rfloor$ dan $\lceil 2\sqrt{3} \rceil$

Solusi: **1)** $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$ dan $\lceil 2.8 \rceil = 3$, **2)** $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.1 \rceil = 4$, **3)** $\lfloor -1.4 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.4 \rceil = -1$, **4)** $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$, **5)**

Latihan

Latihan

Tentukan nilai-nilai berikut:

1) $\lfloor 2.8 \rfloor$ dan $\lceil 2.8 \rceil$
2) $\lfloor 3.1 \rfloor$ dan $\lceil 3.1 \rceil$
3) $\lfloor -1.4 \rfloor$ dan $\lceil -1.4 \rceil$
4) $\lfloor -2.7 \rfloor$ dan $\lceil -2.7 \rceil$
5) $\lfloor \pi \rfloor$ dan $\lceil \pi \rceil$
6) $\lfloor -\pi \rfloor$ dan $\lceil -\pi \rceil$
7) $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil \sqrt{2} \rceil$
8) $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -\sqrt{2} \rceil$
9) $\lfloor -3\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -3\sqrt{2} \rceil$
10) $\lfloor 2\sqrt{3} \rfloor$ dan $\lceil 2\sqrt{3} \rceil$

Solusi: **1)** $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$ dan $\lceil 2.8 \rceil = 3$, **2)** $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.1 \rceil = 4$, **3)** $\lfloor -1.4 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.4 \rceil = -1$, **4)** $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$, **5)** $\lfloor \pi \rfloor = 3$ dan $\lceil \pi \rceil = 4$, **6)**

Latihan

Latihan

Tentukan nilai-nilai berikut:

1) $\lfloor 2.8 \rfloor$ dan $\lceil 2.8 \rceil$
2) $\lfloor 3.1 \rfloor$ dan $\lceil 3.1 \rceil$
3) $\lfloor -1.4 \rfloor$ dan $\lceil -1.4 \rceil$
4) $\lfloor -2.7 \rfloor$ dan $\lceil -2.7 \rceil$
5) $\lfloor \pi \rfloor$ dan $\lceil \pi \rceil$
6) $\lfloor -\pi \rfloor$ dan $\lceil -\pi \rceil$
7) $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil \sqrt{2} \rceil$
8) $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -\sqrt{2} \rceil$
9) $\lfloor -3\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -3\sqrt{2} \rceil$
10) $\lfloor 2\sqrt{3} \rfloor$ dan $\lceil 2\sqrt{3} \rceil$

Solusi: **1)** $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$ dan $\lceil 2.8 \rceil = 3$, **2)** $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.1 \rceil = 4$, **3)** $\lfloor -1.4 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.4 \rceil = -1$, **4)** $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$, **5)** $\lfloor \pi \rfloor = 3$ dan $\lceil \pi \rceil = 4$, **6)** $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ dan $\lceil -\pi \rceil = -3$, **7)**

Latihan

Latihan

Tentukan nilai-nilai berikut:

1) $\lfloor 2.8 \rfloor$ dan $\lceil 2.8 \rceil$
2) $\lfloor 3.1 \rfloor$ dan $\lceil 3.1 \rceil$
3) $\lfloor -1.4 \rfloor$ dan $\lceil -1.4 \rceil$
4) $\lfloor -2.7 \rfloor$ dan $\lceil -2.7 \rceil$
5) $\lfloor \pi \rfloor$ dan $\lceil \pi \rceil$
6) $\lfloor -\pi \rfloor$ dan $\lceil -\pi \rceil$
7) $\left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil \sqrt{2} \right\rceil$
8) $\left\lfloor -\sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil -\sqrt{2} \right\rceil$
9) $\left\lfloor -3\sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil -3\sqrt{2} \right\rceil$
10) $\left\lfloor 2\sqrt{3} \right\rfloor$ dan $\left\lceil 2\sqrt{3} \right\rceil$

Solusi: **1)** $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$ dan $\lceil 2.8 \rceil = 3$, **2)** $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.1 \rceil = 4$, **3)** $\lfloor -1.4 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.4 \rceil = -1$, **4)** $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$, **5)** $\lfloor \pi \rfloor = 3$ dan $\lceil \pi \rceil = 4$, **6)** $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ dan $\lceil -\pi \rceil = -3$, **7)** $\left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1$ dan $\left\lceil \sqrt{2} \right\rceil = 2$, **8)**

Latihan

Latihan

Tentukan nilai-nilai berikut:

1) $\lfloor 2.8 \rfloor$ dan $\lceil 2.8 \rceil$
2) $\lfloor 3.1 \rfloor$ dan $\lceil 3.1 \rceil$
3) $\lfloor -1.4 \rfloor$ dan $\lceil -1.4 \rceil$
4) $\lfloor -2.7 \rfloor$ dan $\lceil -2.7 \rceil$
5) $\lfloor \pi \rfloor$ dan $\lceil \pi \rceil$
6) $\lfloor -\pi \rfloor$ dan $\lceil -\pi \rceil$
7) $\left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil \sqrt{2} \right\rceil$
8) $\left\lfloor -\sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil -\sqrt{2} \right\rceil$
9) $\left\lfloor -3\sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil -3\sqrt{2} \right\rceil$
10) $\left\lfloor 2\sqrt{3} \right\rfloor$ dan $\left\lceil 2\sqrt{3} \right\rceil$

Solusi: **1)** $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$ dan $\lceil 2.8 \rceil = 3$, **2)** $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.1 \rceil = 4$, **3)** $\lfloor -1.4 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.4 \rceil = -1$, **4)** $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$, **5)** $\lfloor \pi \rfloor = 3$ dan $\lceil \pi \rceil = 4$, **6)** $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ dan $\lceil -\pi \rceil = -3$, **7)** $\left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1$ dan $\left\lceil \sqrt{2} \right\rceil = 2$, **8)** $\left\lfloor -\sqrt{2} \right\rfloor = -2$ dan $\left\lceil -\sqrt{2} \right\rceil = -1$, **9)**

Latihan

Latihan

Tentukan nilai-nilai berikut:

1) $\lfloor 2.8 \rfloor$ dan $\lceil 2.8 \rceil$
2) $\lfloor 3.1 \rfloor$ dan $\lceil 3.1 \rceil$
3) $\lfloor -1.4 \rfloor$ dan $\lceil -1.4 \rceil$
4) $\lfloor -2.7 \rfloor$ dan $\lceil -2.7 \rceil$
5) $\lfloor \pi \rfloor$ dan $\lceil \pi \rceil$
6) $\lfloor -\pi \rfloor$ dan $\lceil -\pi \rceil$
7) $\left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil \sqrt{2} \right\rceil$
8) $\left\lfloor -\sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil -\sqrt{2} \right\rceil$
9) $\left\lfloor -3\sqrt{2} \right\rfloor$ dan $\left\lceil -3\sqrt{2} \right\rceil$
10) $\left\lfloor 2\sqrt{3} \right\rfloor$ dan $\left\lceil 2\sqrt{3} \right\rceil$

Solusi: **1)** $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$ dan $\lceil 2.8 \rceil = 3$, **2)** $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.1 \rceil = 4$, **3)** $\lfloor -1.4 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.4 \rceil = -1$, **4)** $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$, **5)** $\lfloor \pi \rfloor = 3$ dan $\lceil \pi \rceil = 4$, **6)** $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ dan $\lceil -\pi \rceil = -3$, **7)** $\left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1$ dan $\left\lceil \sqrt{2} \right\rceil = 2$, **8)** $\left\lfloor -\sqrt{2} \right\rfloor = -2$ dan $\left\lceil -\sqrt{2} \right\rceil = -1$, **9)** $\left\lfloor -3\sqrt{2} \right\rfloor = -5$ dan $\left\lceil -3\sqrt{2} \right\rceil = -4$, **10)**

Latihan

Latihan

Tentukan nilai-nilai berikut:

1) $\lfloor 2.8 \rfloor$ dan $\lceil 2.8 \rceil$
2) $\lfloor 3.1 \rfloor$ dan $\lceil 3.1 \rceil$
3) $\lfloor -1.4 \rfloor$ dan $\lceil -1.4 \rceil$
4) $\lfloor -2.7 \rfloor$ dan $\lceil -2.7 \rceil$
5) $\lfloor \pi \rfloor$ dan $\lceil \pi \rceil$
6) $\lfloor -\pi \rfloor$ dan $\lceil -\pi \rceil$
7) $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil \sqrt{2} \rceil$
8) $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -\sqrt{2} \rceil$
9) $\lfloor -3\sqrt{2} \rfloor$ dan $\lceil -3\sqrt{2} \rceil$
10) $\lfloor 2\sqrt{3} \rfloor$ dan $\lceil 2\sqrt{3} \rceil$

Solusi: **1)** $\lfloor 2.8 \rfloor = 2$ dan $\lceil 2.8 \rceil = 3$, **2)** $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ dan $\lceil 3.1 \rceil = 4$, **3)** $\lfloor -1.4 \rfloor = -2$ dan $\lceil -1.4 \rceil = -1$, **4)** $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ dan $\lceil -2.7 \rceil = -2$, **5)** $\lfloor \pi \rfloor = 3$ dan $\lceil \pi \rceil = 4$, **6)** $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ dan $\lceil -\pi \rceil = -3$, **7)** $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ dan $\lceil \sqrt{2} \rceil = 2$, **8)** $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2$ dan $\lceil -\sqrt{2} \rceil = -1$, **9)** $\lfloor -3\sqrt{2} \rfloor = -5$ dan $\lceil -3\sqrt{2} \rceil = -4$, **10)** $\lfloor 2\sqrt{3} \rfloor = 3$ dan $\lceil 2\sqrt{3} \rceil = 4$.

Fungsi Modulo (mod) dan Divisor (div)

Teorema

Misalkan $a \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}^+$, maka terdapat $q \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$ dengan sifat $0 \leq r < m$ yang memenuhi

$$a = mq + r,$$

nilai q dan r **tunggal (unik)** untuk setiap a dan m. Selanjutnya:

1. nilai q disebut hasil bagi (*quotient*) dari a dibagi m dan dinotasikan dengan $a \operatorname{div} m$;
2. nilai r disebut sisa bagi (*remainder*) dari a dibagi m dan dinotasikan dengan $a \bmod m$ (sisa bagi tidak pernah negatif).

Fungsi mod dan div akan dibahas lebih lanjut pada kajian teori bilangan elementer.

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7\,(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4\,(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7\,(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4\,(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 = 100$, karena $4512 = 45\,(100) + 12$.
4. $0 \bmod 5 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 = 100$, karena $4512 = 45(100) + 12$.
4. $0 \bmod 5 = 0$ dan $0 \operatorname{div} 5 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7\,(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4\,(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 = 100$, karena $4512 = 45\,(100) + 12$.
4. $0 \bmod 5 = 0$ dan $0 \operatorname{div} 5 = 0$, karena $0 = 5\,(0) + 0$.
5. $27 \bmod 4 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7\,(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4\,(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 = 100$, karena $4512 = 45\,(100) + 12$.
4. $0 \bmod 5 = 0$ dan $0 \operatorname{div} 5 = 0$, karena $0 = 5\,(0) + 0$.
5. $27 \bmod 4 = 3$ dan $27 \operatorname{div} 4 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7\,(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4\,(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 = 100$, karena $4512 = 45\,(100) + 12$.
4. $0 \bmod 5 = 0$ dan $0 \operatorname{div} 5 = 0$, karena $0 = 5\,(0) + 0$.
5. $27 \bmod 4 = 3$ dan $27 \operatorname{div} 4 = 6$, karena $27 = 4\,(6) + 3$.
6. $-27 \bmod 4 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 = 100$, karena $4512 = 45(100) + 12$.
4. $0 \bmod 5 = 0$ dan $0 \operatorname{div} 5 = 0$, karena $0 = 5(0) + 0$.
5. $27 \bmod 4 = 3$ dan $27 \operatorname{div} 4 = 6$, karena $27 = 4(6) + 3$.
6. $-27 \bmod 4 = 1$ dan $-27 \operatorname{div} 4 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7\,(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4\,(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 = 100$, karena $4512 = 45\,(100) + 12$.
4. $0 \bmod 5 = 0$ dan $0 \operatorname{div} 5 = 0$, karena $0 = 5\,(0) + 0$.
5. $27 \bmod 4 = 3$ dan $27 \operatorname{div} 4 = 6$, karena $27 = 4\,(6) + 3$.
6. $-27 \bmod 4 = 1$ dan $-27 \operatorname{div} 4 = -7$, karena $-27 = 4\,(-7) + 1$.
7. $37 \bmod 6 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 = 100$, karena $4512 = 45(100) + 12$.
4. $0 \bmod 5 = 0$ dan $0 \operatorname{div} 5 = 0$, karena $0 = 5(0) + 0$.
5. $27 \bmod 4 = 3$ dan $27 \operatorname{div} 4 = 6$, karena $27 = 4(6) + 3$.
6. $-27 \bmod 4 = 1$ dan $-27 \operatorname{div} 4 = -7$, karena $-27 = 4(-7) + 1$.
7. $37 \bmod 6 = 1$ dan $37 \operatorname{div} 6 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 = 100$, karena $4512 = 45(100) + 12$.
4. $0 \bmod 5 = 0$ dan $0 \operatorname{div} 5 = 0$, karena $0 = 5(0) + 0$.
5. $27 \bmod 4 = 3$ dan $27 \operatorname{div} 4 = 6$, karena $27 = 4(6) + 3$.
6. $-27 \bmod 4 = 1$ dan $-27 \operatorname{div} 4 = -7$, karena $-27 = 4(-7) + 1$.
7. $37 \bmod 6 = 1$ dan $37 \operatorname{div} 6 = 6$, karena $37 = 6(6) + 1$.
8. $-37 \bmod 6 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 = 100$, karena $4512 = 45(100) + 12$.
4. $0 \bmod 5 = 0$ dan $0 \operatorname{div} 5 = 0$, karena $0 = 5(0) + 0$.
5. $27 \bmod 4 = 3$ dan $27 \operatorname{div} 4 = 6$, karena $27 = 4(6) + 3$.
6. $-27 \bmod 4 = 1$ dan $-27 \operatorname{div} 4 = -7$, karena $-27 = 4(-7) + 1$.
7. $37 \bmod 6 = 1$ dan $37 \operatorname{div} 6 = 6$, karena $37 = 6(6) + 1$.
8. $-37 \bmod 6 = 5$ dan $-37 \operatorname{div} 6 =$

Contoh

Contoh

Kita memiliki

1. $25 \bmod 7 = 4$ dan $25 \operatorname{div} 7 = 3$, karena $25 = 7(3) + 4$.
2. $16 \bmod 4 = 0$ dan $16 \operatorname{div} 4 = 4$, karena $16 = 4(4) + 0$.
3. $4512 \bmod 45 = 12$ dan $4512 \operatorname{div} 45 = 100$, karena $4512 = 45(100) + 12$.
4. $0 \bmod 5 = 0$ dan $0 \operatorname{div} 5 = 0$, karena $0 = 5(0) + 0$.
5. $27 \bmod 4 = 3$ dan $27 \operatorname{div} 4 = 6$, karena $27 = 4(6) + 3$.
6. $-27 \bmod 4 = 1$ dan $-27 \operatorname{div} 4 = -7$, karena $-27 = 4(-7) + 1$.
7. $37 \bmod 6 = 1$ dan $37 \operatorname{div} 6 = 6$, karena $37 = 6(6) + 1$.
8. $-37 \bmod 6 = 5$ dan $-37 \operatorname{div} 6 = -7$, karena $-37 = 6(-7) + 5$.

Fungsi Faktorial

Definisi

Fungsi faktorial merupakan fungsi dari $\mathbb{N}_0$ ke $\mathbb{N}$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 0 \\ n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1, & \text{jika } n > 0 \end{cases}$$

Sebagai contoh, kita memiliki $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, dan $5! = 120$.

Fungsi Eksponensial

Definisi

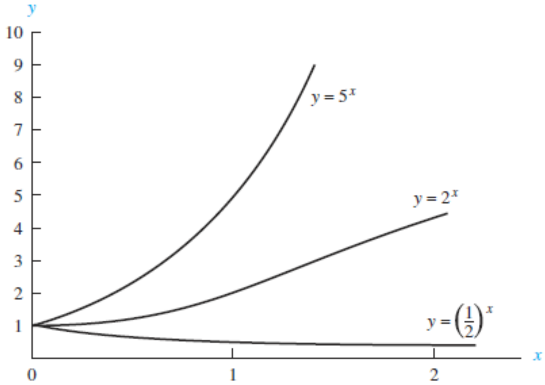
Misalkan $a \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$. Fungsi eksponensial didefinisikan sebagai berikut:

1. untuk $n \in \mathbb{N}_0$, maka

$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ suku}}, & \text{jika } n > 0 \end{cases}$$

2. untuk $n \in \mathbb{Z}$, jika $n = -m < 0$, maka $a^n = a^{-m} = \frac{1}{a^m}$,
3. untuk $q \in \mathbb{Q}$, jika $q = \frac{m}{n}$ dengan $m, n \in \mathbb{Z}$ dan $n \neq 0$, maka $a^q = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$,
4. untuk $x \in \mathbb{R}$, jika x irasional, maka a^x didefinisikan sebagai $a^x = e^{x \ln a}$, dengan $\ln a$ menyatakan logaritma natural dari a.

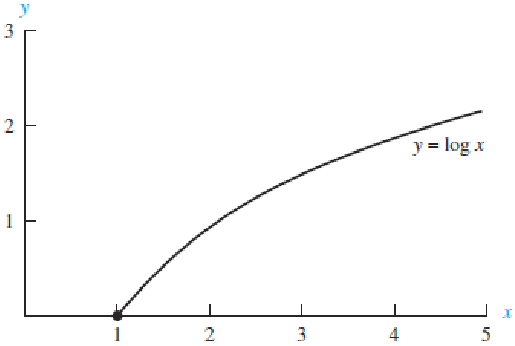
Contoh Fungsi Eksponensial



Fungsi Logaritmik

Fungsi Logaritmik

Dari ekspresi $y = a^x$, maka kita dapat memperoleh $x = {}^a\log y = \log_a y$. Fungsi $f(x) = \log_a x$ dengan $a > 0$ dikatakan fungsi logaritmik dengan basis a.



Fungsi Rekursif

Fungsi Rekursif

Suatu fungsi f dikatakan fungsi rekursif bila definisi fungsinya mengacu pada f itu sendiri. Fungsi rekursif terdiri dari kasus basis (*base case*) dan kasus rekursif (*recursive case*).

Contoh

Fungsi faktorial dapat didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 0 \\ n \times (n-1)!, & \text{jika } n > 0. \end{cases}$$

Kita memiliki $0! = 0$, $1! = 1 \cdot 0! = 1$, $2! = 2 \cdot 1! = 2$, dan seterusnya. Kasus $n! = 1$ jika $n = 0$ dikatakan kasus basis (*base case*), sedangkan kasus $n! = n \times (n-1)!$ dikatakan kasus rekursif (*recursive case*).

Fungsi Rekursif dan Algoritma Rekursif

Fungsi rekursif dapat didefinisikan memakai suatu formula tertentu atau dengan program dalam bahasa tertentu.

Contoh

Fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang didefinisikan secara rekursif dengan definisi:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2, & n = 2 \\ f(n-1) + f(n-2), & n \geq 3 \end{cases}$$

dapat ditulis dalam bahasa Python sebagai berikut:

```
def f(n):
    if n == 1: return 1
    if n == 2: return 2
    else: return f(n-1) + f(n-2)
```

Latihan

Tentukan nilai dari $f(5)$, $f(6)$, dan $f(7)$.

Bahasan

Challenging Problems

Fungsi Ackerman

Fungsi Ackermann adalah sebuah fungsi yang penting dalam *theoretical computer science* karena banyak digunakan dalam kajian algoritma rekursif terkait himpunan. Salah satu fungsi Ackermann adalah $A : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$A(m,n) = \begin{cases} 2n, & \text{jika } m = 0 \\ 0, & \text{jika } m \geq 1 \text{ dan } n = 0 \\ 2 & \text{jika } m \geq 1 \text{ dan } n = 1 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{jika } m \geq 1 \text{ dan } n \geq 2 \end{cases}.$$

Tentukan nilai dari $A(2,2)$, $A(2,3)$, dan $A(3,3)$.

Nearest Power of 2

Dalam komputer bilangan biasanya dikonversi ke dalam ekspresi bit (*binary digit*, bilangan basis 2). Sebagai contoh:

$$2 := \mathbf{10},\ 4 := \mathbf{100},\ 6 := \mathbf{110},\ 7 := \mathbf{111},\ 10 := \mathbf{1010}$$

Untuk merepresentasikan suatu bilangan bulat positif n ke dalam suatu ekspresi bit, maka kita perlu mengetahui panjang bit (banyaknya digit) yang diperlukan. Misalkan panjang bit minimal yang diperlukan untuk merepresentasikan n dalam suatu ekspresi bit adalah $\ell(n)$, sebagai contoh, kita memiliki

$$\ell(2) = 2,\ \ell(4) = 3,\ \ell(6) = 3,\ \ell(7) = 3,\ \ell(10) = 4.$$

Pada dasarnya $\ell(n)$ merupakan bilangan bulat terkecil k yang memenuhi $n \leq 2^k$. Berikan suatu formulasi matematis untuk fungsi $\ell(n)$.

Piecewise Function

Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \begin{cases} 4x + 3, & \text{jika } x \leq 1 \\ 2x + 1, & \text{jika } x > 1. \end{cases}$. Periksa apakah f bersifat injektif, surjektif, bijektif, atau tidak ketiganya.