Relasi: Sifat dan Komposisi

Kuliah Matematika Diskret Semester Genap 2022-2023

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

Maret 2023

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications* , Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Mathematics for Computer Science*. MIT, 2010, oleh E. Lehman, F. T. Leighton, A. R. Meyer.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 2 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
5. *Slide* kuliah Matematika Diskrit di Telkom University oleh B. Purnama.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

Bahasan

Bahasan

Operasi Komplemen, $\vee$, dan $\wedge$ pada $0, 1$

Definisi

Jika $a \in \{0,1\}$, maka $\bar{a} = \neg a = \begin{cases} 1, & \text{jika } a = 0 \\ 0, & \text{jika } a = 1. \end{cases}$

Definisi

Operasi $\wedge$ dan $\vee$ pada himpunan $\{0,1\}$ didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $a, b \in \{0,1\}$

$$a \vee b = \begin{cases} 1, & \text{jika } a = 1 \text{ atau } b = 1 \\ 0, & \text{lainnya,} \end{cases}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} 1, & \text{jika } a = b = 1 \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Operasi Komplemen, $\vee$, dan $\wedge$ pada Matriks $0-1$

Definisi

Misalkan $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ adalah suatu matriks $0-1$ dengan m baris dan n kolom, maka matriks komplemen $\overline{\mathbf{A}}$ (atau $\neg\mathbf{A}$) merupakan matriks berukuran $m \times n$ yang entri pada baris ke-i dan kolom ke-j nya adalah $\overline{\mathbf{A}}[i,j] = [\bar{a}_{ij}]$,

Definisi

Misalkan $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ dan $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ adalah dua matriks $0-1$ dengan m baris dan n kolom, maka konjungsi $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ dan disjungsi $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ berturut-turut merupakan matriks berukuran $m \times n$ yang entri pada baris ke-i dan kolom ke-j nya adalah

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})[i,j] &= \mathbf{A}[i,j] \wedge \mathbf{B}[i,j] = [a_{ij} \wedge b_{ij}],\\ (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})[i,j] &= \mathbf{A}[i,j] \vee \mathbf{B}[i,j] = [a_{ij} \vee b_{ij}].\end{aligned}$$

Matriks Representasi untuk R^{-1}, $\bar{R}$, $R_1 \cup R_2$, dan $R_1 \cap R_2$

Teorema

Misalkan R adalah relasi dari A ke B yang keduanya merupakan himpunan berhingga. Apabila $\mathbf{M}_R$ adalah matriks representasi untuk R, maka matriks representasi untuk relasi R^{-1} yang merupakan relasi dari B ke A, dinotasikan dengan $\mathbf{M}_{R^{-1}}$, memenuhi hubungan $\mathbf{M}_{R^{-1}} = (\mathbf{M}_R)^T$.

Teorema

Misalkan R adalah relasi dari A ke B yang keduanya adalah himpunan berhingga. Apabila $\mathbf{M}_R$ adalah matriks representasi untuk R, maka matriks representasi untuk relasi $\bar{R}$ yang dinotasikan dengan $\mathbf{M}_{\bar{R}}$ memenuhi hubungan $\mathbf{M}_{\bar{R}} = \overline{\mathbf{M}}_R$.

Teorema

Misalkan R_1 dan R_2 keduanya adalah relasi dari A ke B. Apabila $\mathbf{M}_{R_1}$ dan $\mathbf{M}_{R_2}$ berturut-turut merupakan matriks representasi relasi untuk R_1 dan R_2, maka matriks representasi untuk $R_1 \cup R_2$ dan $R_1 \cap R_2$ berturut-turut adalah

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} &= \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_1} \text{ dan}\\ \mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} &= \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2}.\end{aligned}$$

Latihan

Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi pada himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan memiliki matriks -matriks representasi sebagai berikut

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tentukan matriks representasi untuk $\bar{R}_1$, R_1^{-1}, $R_1 \cup R_2$, dan $R_1 \cap R_2$

Solusi: $\mathbf{M}_{\bar{R}_1} =$

Latihan

Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi pada himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan memiliki matriks -matriks representasi sebagai berikut

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tentukan matriks representasi untuk $\bar{R}_1$, R_1^{-1}, $R_1 \cup R_2$, dan $R_1 \cap R_2$

Solusi: $\mathbf{M}_{\bar{R}_1} = \overline{\mathbf{M}}_{R_1} =$

Latihan

Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi pada himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan memiliki matriks -matriks representasi sebagai berikut

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tentukan matriks representasi untuk $\bar{R}_1$, R_1^{-1}, $R_1 \cup R_2$, dan $R_1 \cap R_2$

Solusi: $\mathbf{M}_{\bar{R}_1} = \overline{\mathbf{M}}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_1^{-1}} =$

Latihan

Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi pada himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan memiliki matriks -matriks representasi sebagai berikut

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tentukan matriks representasi untuk $\bar{R}_1$, R_1^{-1}, $R_1 \cup R_2$, dan $R_1 \cap R_2$

Solusi: $\mathbf{M}_{\bar{R}_1} = \overline{\mathbf{M}}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_1^{-1}} = \left(\mathbf{M}_{R_1}\right)^T =$

Latihan

Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi pada himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan memiliki matriks -matriks representasi sebagai berikut

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tentukan matriks representasi untuk $\bar{R}_1$, R_1^{-1}, $R_1 \cup R_2$, dan $R_1 \cap R_2$

Solusi: $\mathbf{M}_{\bar{R}_1} = \overline{\mathbf{M}}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_1^{-1}} = (\mathbf{M}_{R_1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} =$

Latihan

Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi pada himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan memiliki matriks -matriks representasi sebagai berikut

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tentukan matriks representasi untuk $\bar{R}_1$, R_1^{-1}, $R_1 \cup R_2$, dan $R_1 \cap R_2$

Solusi: $\mathbf{M}_{\bar{R}_1} = \overline{\mathbf{M}}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_1^{-1}} = (\mathbf{M}_{R_1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} =$

Latihan

Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi pada himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan memiliki matriks -matriks representasi sebagai berikut

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tentukan matriks representasi untuk $\bar{R}_1$, R_1^{-1}, $R_1 \cup R_2$, dan $R_1 \cap R_2$

Solusi: $\mathbf{M}_{\bar{R}_1} = \overline{\mathbf{M}}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_{R_1^{-1}} = (\mathbf{M}_{R_1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} =$

Latihan

Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi pada himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan memiliki matriks -matriks representasi sebagai berikut

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tentukan matriks representasi untuk $\bar{R}_1$, R_1^{-1}, $R_1 \cup R_2$, dan $R_1 \cap R_2$

Solusi: $\mathbf{M}_{\bar{R}_1} = \overline{\mathbf{M}}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_{R_1^{-1}} = (\mathbf{M}_{R_1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2} =$$

Latihan

Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi pada himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan memiliki matriks -matriks representasi sebagai berikut

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tentukan matriks representasi untuk $\bar{R}_1$, R_1^{-1}, $R_1 \cup R_2$, dan $R_1 \cap R_2$

Solusi: $\mathbf{M}_{\bar{R}_1} = \overline{\mathbf{M}}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{R_1^{-1}} = \left(\mathbf{M}_{R_1}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bahasan

Bahasan

2. Beberapa Relasi Biner dengan Sifat Khusus
   - Relasi Refleksif dan Irefleksif
   - Relasi Simetris, Antisimetris, dan Asimetris
   - Relasi Transitif

Relasi Refleksif dan Irefleksif

Definisi

Misalkan R adalah suatu relasi biner pada himpunan A, relasi R dikatakan:

1. refleksif, apabila untuk setiap $a \in A$ berlaku $(a,a) \in R$, atau aRa; dalam formula logika predikat, R refleksif bila:
   $\forall a\,(aRa)$ atau $\forall a\,((a,a) \in R)$.
2. irefleksif, apabila untuk setiap $a \in A$ berlaku $(a,a) \notin R$, atau $a \not R a$; dalam formula logika predikat, R irefleksif bila:
   $\forall a\,(a \not R a)$ atau $\forall a\,((a,a) \notin R)$ atau $\forall a\,(\neg\,(a,a) \in R)$.

Pertanyaan:

Relasi Refleksif dan Irefleksif

Definisi

Misalkan R adalah suatu relasi biner pada himpunan A, relasi R dikatakan:

1. refleksif, apabila untuk setiap $a \in A$ berlaku $(a, a) \in R$, atau aRa; dalam formula logika predikat, R refleksif bila:
   $\forall a\,(aRa)$ atau $\forall a\,((a, a) \in R)$.
2. irefleksif, apabila untuk setiap $a \in A$ berlaku $(a, a) \notin R$, atau $a \not R a$; dalam formula logika predikat, R irefleksif bila:
   $\forall a\,(a \not R a)$ atau $\forall a\,((a, a) \notin R)$ atau $\forall a\,(\neg\,(a, a) \in R)$.

Pertanyaan: Apakah irefleksif berarti tidak refleksif?

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, dan R_3 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,1)\}$.

Kita memiliki:

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, dan R_3 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,1)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 bersifat refleksif karena $(1,1) \in R_1$, $(2,2) \in R_1$, $(3,3) \in R_1$, $(4,4) \in R_1$.

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, dan R_3 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,1)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 bersifat refleksif karena $(1,1) \in R_1$, $(2,2) \in R_1$, $(3,3) \in R_1$, $(4,4) \in R_1$. Relasi R_1 **tidak** bersifat irefleksif karena tidak benar bahwa $(1,1) \notin R_1$.

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, dan R_3 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,1)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 bersifat refleksif karena $(1,1) \in R_1$, $(2,2) \in R_1$, $(3,3) \in R_1$, $(4,4) \in R_1$. Relasi R_1 **tidak** bersifat irefleksif karena tidak benar bahwa $(1,1) \notin R_1$.
2. Relasi R_2 **tidak** bersifat refleksif karena $(1,1) \notin R_2$.

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, dan R_3 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,1)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 bersifat refleksif karena $(1,1) \in R_1$, $(2,2) \in R_1$, $(3,3) \in R_1$, $(4,4) \in R_1$. Relasi R_1 **tidak** bersifat irefleksif karena tidak benar bahwa $(1,1) \notin R_1$.
2. Relasi R_2 **tidak** bersifat refleksif karena $(1,1) \notin R_2$. Relasi R_2 bersifat irefleksif karena $(1,1) \notin R_2$, $(2,2) \notin R_2$, $(3,3) \notin R_2$, dan $(4,4) \notin R_2$.

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, dan R_3 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,1)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 bersifat refleksif karena $(1,1) \in R_1$, $(2,2) \in R_1$, $(3,3) \in R_1$, $(4,4) \in R_1$. Relasi R_1 **tidak** bersifat irefleksif karena tidak benar bahwa $(1,1) \notin R_1$.
2. Relasi R_2 **tidak** bersifat refleksif karena $(1,1) \notin R_2$. Relasi R_2 bersifat irefleksif karena $(1,1) \notin R_2$, $(2,2) \notin R_2$, $(3,3) \notin R_2$, dan $(4,4) \notin R_2$.
3. Relasi R_3 **tidak** bersifat refleksif karena $(2,2) \notin R_3$.

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, dan R_3 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,1)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 bersifat refleksif karena $(1,1) \in R_1$, $(2,2) \in R_1$, $(3,3) \in R_1$, $(4,4) \in R_1$. Relasi R_1 **tidak** bersifat irefleksif karena tidak benar bahwa $(1,1) \notin R_1$.
2. Relasi R_2 **tidak** bersifat refleksif karena $(1,1) \notin R_2$. Relasi R_2 bersifat irefleksif karena $(1,1) \notin R_2$, $(2,2) \notin R_2$, $(3,3) \notin R_2$, dan $(4,4) \notin R_2$.
3. Relasi R_3 **tidak** bersifat refleksif karena $(2,2) \notin R_3$. Relasi R_3 **tidak** bersifat irefleksif karena tidak benar bahwa $(1,1) \notin R_3$.

Latihan: Relasi Refleksif dan Irefleksif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat refleksif, irefleksif, atau tidak keduanya.

1. aR_1b jikka $a \leq b$.
2. aR_2b jikka $a = b + 1$.
3. aR_3b jikka a dibagi b merupakan bilangan bulat.
4. aR_4b jikka $a \geq b^2$.

Solusi:

Latihan: Relasi Refleksif dan Irefleksif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat refleksif, irefleksif, atau tidak keduanya.

1. aR_1b jikka $a \leq b$.
2. aR_2b jikka $a = b + 1$.
3. aR_3b jikka a dibagi b merupakan bilangan bulat.
4. aR_4b jikka $a \geq b^2$.

Solusi:

1. R_1 refleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \leq a$,

Latihan: Relasi Refleksif dan Irefleksif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat refleksif, irefleksif, atau tidak keduanya.

1. aR_1b jikka $a \leq b$.
2. aR_2b jikka $a = b + 1$.
3. aR_3b jikka a dibagi b merupakan bilangan bulat.
4. aR_4b jikka $a \geq b^2$.

Solusi:

1. R_1 refleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \leq a$, R_1 tidak irefleksif karena $0 \leq 0$.

Latihan: Relasi Refleksif dan Irefleksif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat refleksif, irefleksif, atau tidak keduanya.

1. aR_1b jikka $a \leq b$.
2. aR_2b jikka $a = b + 1$.
3. aR_3b jikka a dibagi b merupakan bilangan bulat.
4. aR_4b jikka $a \geq b^2$.

Solusi:

1. R_1 refleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \leq a$, R_1 tidak irefleksif karena $0 \leq 0$.
2. R_2 tidak refleksif karena $0 \neq 0 + 1$,

Latihan: Relasi Refleksif dan Irefleksif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat refleksif, irefleksif, atau tidak keduanya.

1. aR_1b jikka $a \leq b$.
2. aR_2b jikka $a = b + 1$.
3. aR_3b jikka a dibagi b merupakan bilangan bulat.
4. aR_4b jikka $a \geq b^2$.

Solusi:

1. R_1 refleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \leq a$, R_1 tidak irefleksif karena $0 \leq 0$.
2. R_2 tidak refleksif karena $0 \neq 0 + 1$, R_2 irefleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \neq a + 1$ ($a \not{R}_2 a$).

Latihan: Relasi Refleksif dan Irefleksif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat refleksif, irefleksif, atau tidak keduanya.

1. aR_1b jikka $a \leq b$.
2. aR_2b jikka $a = b + 1$.
3. aR_3b jikka a dibagi b merupakan bilangan bulat.
4. aR_4b jikka $a \geq b^2$.

Solusi:

1. R_1 refleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \leq a$, R_1 tidak irefleksif karena $0 \leq 0$.
2. R_2 tidak refleksif karena $0 \neq 0 + 1$, R_2 irefleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \neq a + 1$ ($a \not R_2 a$).
3. R_3 tidak refleksif karena 0 dibagi 0 bukan bilangan bulat,

Latihan: Relasi Refleksif dan Irefleksif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat refleksif, irefleksif, atau tidak keduanya.

1. aR_1b jikka $a \leq b$.
2. aR_2b jikka $a = b + 1$.
3. aR_3b jikka a dibagi b merupakan bilangan bulat.
4. aR_4b jikka $a \geq b^2$.

Solusi:

1. R_1 refleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \leq a$, R_1 tidak irefleksif karena $0 \leq 0$.
2. R_2 tidak refleksif karena $0 \neq 0 + 1$, R_2 irefleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \neq a + 1$ ($a \not{R}_2 a$).
3. R_3 tidak refleksif karena 0 dibagi 0 bukan bilangan bulat, R_3 tidak irefleksif karena 1 habis membagi 1.

Latihan: Relasi Refleksif dan Irefleksif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat refleksif, irefleksif, atau tidak keduanya.

1. aR_1b jikka $a \leq b$.
2. aR_2b jikka $a = b + 1$.
3. aR_3b jikka a dibagi b merupakan bilangan bulat.
4. aR_4b jikka $a \geq b^2$.

Solusi:

1. R_1 refleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \leq a$, R_1 tidak irefleksif karena $0 \leq 0$.
2. R_2 tidak refleksif karena $0 \neq 0 + 1$, R_2 irefleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \neq a + 1$ ($a \not R_2 a$).
3. R_3 tidak refleksif karena 0 dibagi 0 bukan bilangan bulat, R_3 tidak irefleksif karena 1 habis membagi 1.
4. R_4 tidak refleksif karena $2 \not\geq 2^2$,

Latihan: Relasi Refleksif dan Irefleksif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat refleksif, irefleksif, atau tidak keduanya.

1. aR_1b jikka $a \leq b$.
2. aR_2b jikka $a = b + 1$.
3. aR_3b jikka a dibagi b merupakan bilangan bulat.
4. aR_4b jikka $a \geq b^2$.

Solusi:

1. R_1 refleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \leq a$, R_1 tidak irefleksif karena $0 \leq 0$.
2. R_2 tidak refleksif karena $0 \neq 0 + 1$, R_2 irefleksif karena untuk semua $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a \neq a + 1$ ($a \not R_2 a$).
3. R_3 tidak refleksif karena 0 dibagi 0 bukan bilangan bulat, R_3 tidak irefleksif karena 1 habis membagi 1.
4. R_4 tidak refleksif karena $2 \not\geq 2^2$, R_4 tidak irefleksif karena $0 \geq 0^2$.

Bahasan

2. Beberapa Relasi Biner dengan Sifat Khusus
   - Relasi Refleksif dan Irefleksif
   - Relasi Simetris, Antisimetris, dan Asimetris
   - Relasi Transitif

Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Definisi

Misalkan R adalah suatu relasi biner pada himpunan A, relasi R dikatakan:

1. simetris, apabila setiap $a, b \in A$ memenuhi: jika aRb maka bRa, formula logika predikatnya adalah $\forall a \forall b \left(aRb \to bRa\right)$;
2. antisimetris, apabila setiap $a, b \in A$ memenuhi jika aRb **dan** bRa maka haruslah $a = b$, formula logika predikatnya adalah $\forall a \forall b \left(aRb \land bRa \to a = b\right)$;
3. asimetris, apabila setiap $a, b \in A$ memenuhi jika aRb maka $b\not{R}a$, formula logika predikatnya adalah $\forall a \forall b \left(aRb \to b\not{R}a\right)$.

Pertanyaan:

Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Definisi

Misalkan R adalah suatu relasi biner pada himpunan A, relasi R dikatakan:

1. simetris, apabila setiap $a, b \in A$ memenuhi: jika aRb maka bRa, formula logika predikatnya adalah $\forall a \forall b\, (aRb \rightarrow bRa)$;
2. antisimetris, apabila setiap $a, b \in A$ memenuhi jika aRb **dan** bRa maka haruslah $a = b$, formula logika predikatnya adalah $\forall a \forall b\, (aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$;
3. asimetris, apabila setiap $a, b \in A$ memenuhi jika aRb maka $b\not R a$, formula logika predikatnya adalah $\forall a \forall b\, (aRb \rightarrow b\not R a)$.

Pertanyaan: Apakah antisimetris berarti tidak simetris?

Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Definisi

Misalkan R adalah suatu relasi biner pada himpunan A, relasi R dikatakan:

1. simetris, apabila setiap $a, b \in A$ memenuhi: jika aRb maka bRa, formula logika predikatnya adalah $\forall a \forall b \, (aRb \rightarrow bRa)$;
2. antisimetris, apabila setiap $a, b \in A$ memenuhi jika aRb **dan** bRa maka haruslah $a = b$, formula logika predikatnya adalah $\forall a \forall b \, (aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$;
3. asimetris, apabila setiap $a, b \in A$ memenuhi jika aRb maka $b \not{R} a$, formula logika predikatnya adalah $\forall a \forall b \, (aRb \rightarrow b \not{R} a)$.

Pertanyaan: Apakah antisimetris berarti tidak simetris? Apakah asimetris berarti tidak simetris?

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$.

Kita memiliki:

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 simetris karena $1R_12 \rightarrow 2R_11$ dan $2R_14 \rightarrow 4R_12$ keduanya bernilai T.

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 simetris karena $1R_12 \to 2R_11$ dan $2R_14 \to 4R_12$ keduanya bernilai T. Relasi R_1 **tidak** antisimetris karena $(1R_12) \wedge (2R_11) \to (1 = 2)$ bernilai F.

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 simetris karena $1R_12 \to 2R_11$ dan $2R_14 \to 4R_12$ keduanya bernilai T. Relasi R_1 **tidak** antisimetris karena $(1R_12) \wedge (2R_11) \to (1 = 2)$ bernilai F. Relasi R_1 **tidak** asimetris karena $(1R_12) \to (2 \not{R}_1 1)$ bernilai F.

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 simetris karena $1R_1 2 \to 2R_1 1$ dan $2R_1 4 \to 4R_1 2$ keduanya bernilai T. Relasi R_1 **tidak** antisimetris karena $(1R_1 2) \wedge (2R_1 1) \to (1 = 2)$ bernilai F. Relasi R_1 **tidak** asimetris karena $(1R_1 2) \to (2 \not R_1 1)$ bernilai F.
2. Relasi R_2 **tidak** simetris karena $2R_2 3 \to 3R_2 2$ bernilai F.

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 simetris karena $1R_12 \to 2R_11$ dan $2R_14 \to 4R_12$ keduanya bernilai T. Relasi R_1 **tidak** antisimetris karena $(1R_12) \wedge (2R_11) \to (1 = 2)$ bernilai F. Relasi R_1 **tidak** asimetris karena $(1R_12) \to (2\not R_1 1)$ bernilai F.
2. Relasi R_2 **tidak** simetris karena $2R_23 \to 3R_22$ bernilai F. Relasi R_2 **tidak** antisimetris karena $(2R_24) \wedge (4R_22) \to (2 = 4)$ bernilai F.

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1),(2,3),(2,4),(4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2),(3,4)\}$.

Kita memiliki:

1. Relasi R_1 simetris karena $1R_12 \to 2R_11$ dan $2R_14 \to 4R_12$ keduanya bernilai T. Relasi R_1 **tidak** antisimetris karena $(1R_12) \wedge (2R_11) \to (1=2)$ bernilai F. Relasi R_1 **tidak** asimetris karena $(1R_12) \to (2\not{R}_11)$ bernilai F.
2. Relasi R_2 **tidak** simetris karena $2R_23 \to 3R_22$ bernilai F. Relasi R_2 **tidak** antisimetris karena $(2R_24) \wedge (4R_22) \to (2=4)$ bernilai F. Relasi R_2 **tidak** asimetris karena $2R_24 \to 4\not{R}_22$ bernilai F.

3. Relasi R_3 simetris karena $1R_31 \rightarrow 1R_31$, $2R_32 \rightarrow 2R_32$, dan $3R_33 \rightarrow 3R_33$ semuanya T.

3. Relasi R_3 simetris karena $1R_31 \rightarrow 1R_31$, $2R_32 \rightarrow 2R_32$, dan $3R_33 \rightarrow 3R_33$ semuanya T. Relasi R_3 antisimetris karena $(aR_3b) \wedge (bR_3a) \rightarrow (a = b)$ bernilai T untuk setiap $a, b \in \{1, 2, 3\}$, karena tidak ada $a \neq b$ yang memenuhi $(aR_3b) \wedge (bR_3a)$.

3. Relasi R_3 simetris karena $1R_31 \to 1R_31$, $2R_32 \to 2R_32$, dan $3R_33 \to 3R_33$ semuanya T. Relasi R_3 antisimetris karena $(aR_3b) \wedge (bR_3a) \to (a = b)$ bernilai T untuk setiap $a, b \in \{1, 2, 3\}$, karena tidak ada $a \neq b$ yang memenuhi $(aR_3b) \wedge (bR_3a)$. Relasi R_3 **tidak** asimetris karena $1R_31 \to 1\not{R}_31$ bernilai F.

3. Relasi R_3 simetris karena $1R_31 \to 1R_31$, $2R_32 \to 2R_32$, dan $3R_33 \to 3R_33$ semuanya T. Relasi R_3 antisimetris karena $(aR_3b) \land (bR_3a) \to (a = b)$ bernilai T untuk setiap $a, b \in \{1, 2, 3\}$, karena tidak ada $a \neq b$ yang memenuhi $(aR_3b) \land (bR_3a)$. Relasi R_3 **tidak** asimetris karena $1R_31 \to 1\not{R}_31$ bernilai F.
4. Relasi R_4 **tidak** simetris karena $1R_42 \to 2R_41$ bernilai F.

3. Relasi R_3 simetris karena $1R_31 \to 1R_31$, $2R_32 \to 2R_32$, dan $3R_33 \to 3R_33$ semuanya T. Relasi R_3 antisimetris karena $(aR_3b) \wedge (bR_3a) \to (a = b)$ bernilai T untuk setiap $a, b \in \{1, 2, 3\}$, karena tidak ada $a \neq b$ yang memenuhi $(aR_3b) \wedge (bR_3a)$. Relasi R_3 **tidak** asimetris karena $1R_31 \to 1\not{R}_31$ bernilai F.
4. Relasi R_4 **tidak** simetris karena $1R_42 \to 2R_41$ bernilai F. Relasi R_4 bersifat antisimetris karena $(aR_4b) \wedge (bR_4a) \to (a = b)$ selalu bernilai T, karena nilai kebenaran dari $(aR_4b) \wedge (bR_4a)$ selalu F.

3. Relasi R_3 simetris karena $1R_31 \to 1R_31$, $2R_32 \to 2R_32$, dan $3R_33 \to 3R_33$ semuanya T. Relasi R_3 antisimetris karena $(aR_3b) \wedge (bR_3a) \to (a = b)$ bernilai T untuk setiap $a, b \in \{1, 2, 3\}$, karena tidak ada $a \neq b$ yang memenuhi $(aR_3b) \wedge (bR_3a)$. Relasi R_3 **tidak** asimetris karena $1R_31 \to 1\not{R}_31$ bernilai F.
4. Relasi R_4 **tidak** simetris karena $1R_42 \to 2R_41$ bernilai F. Relasi R_4 bersifat antisimetris karena $(aR_4b) \wedge (bR_4a) \to (a = b)$ selalu bernilai T, karena nilai kebenaran dari $(aR_4b) \wedge (bR_4a)$ selalu F. Relasi R_4 asimetris karena $1R_42 \to 2\not{R}_41$ dan $3R_44 \to 4\not{R}_43$ keduanya T.

Latihan: Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

Latihan: Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

1. R_1 simetris karena untuk sembarang bilangan bulat a dan b berlaku:

Latihan: Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

1. R_1 simetris karena untuk sembarang bilangan bulat a dan b berlaku:
   $aR_1b \Rightarrow$

Latihan: Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

1. R_1 simetris karena untuk sembarang bilangan bulat a dan b berlaku:
   $aR_1b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow$

Latihan: Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

1. R_1 simetris karena untuk sembarang bilangan bulat a dan b berlaku: $aR_1b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow$

Latihan: Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

1. R_1 simetris karena untuk sembarang bilangan bulat a dan b berlaku:
   $aR_1b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow bR_1a$.

Latihan: Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

1. R_1 simetris karena untuk sembarang bilangan bulat a dan b berlaku: $aR_1b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow bR_1a$. R_1 tidak antisimetris karena $2^2 = (-2)^2$ dan $(-2)^2 = 2^2$ tetapi $2 \neq -2$ ($2R_1 - 2$ dan $-2R_12$ tetapi $2 \neq -2$).

Latihan: Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

1. R_1 simetris karena untuk sembarang bilangan bulat a dan b berlaku: $aR_1b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow bR_1a$. R_1 tidak antisimetris karena $2^2 = (-2)^2$ dan $(-2)^2 = 2^2$ tetapi $2 \neq -2$ ($2R_1 - 2$ dan $-2R_12$ tetapi $2 \neq -2$). R_1 tidak asimetris karena $2^2 = (-2)^2$ dan $(-2)^2 = 2^2$ ($2R_1 - 2$ tetapi tidak benar bahwa$-2\not R_1 2$).

Latihan: Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

1. R_1 simetris karena untuk sembarang bilangan bulat a dan b berlaku: $aR_1b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow bR_1a$. R_1 tidak antisimetris karena $2^2 = (-2)^2$ dan $(-2)^2 = 2^2$ tetapi $2 \neq -2$ ($2R_1 - 2$ dan $-2R_12$ tetapi $2 \neq -2$). R_1 tidak asimetris karena $2^2 = (-2)^2$ dan $(-2)^2 = 2^2$ ($2R_1 - 2$ tetapi tidak benar bahwa$-2 \not{R}_1 2$).
2. R_2 tidak simetris karena $0 \leq 1$ tetapi $1 \not\leq 0$ ($0R_21$ tetapi $1 \not{R}_2 0$).

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

1. R_1 simetris karena untuk sembarang bilangan bulat a dan b berlaku: $aR_1b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow bR_1a$. R_1 tidak antisimetris karena $2^2 = (-2)^2$ dan $(-2)^2 = 2^2$ tetapi $2 \neq -2$ ($2R_1 - 2$ dan $-2R_12$ tetapi $2 \neq -2$). R_1 tidak asimetris karena $2^2 = (-2)^2$ dan $(-2)^2 = 2^2$ ($2R_1 - 2$ tetapi tidak benar bahwa$-2\not R_1 2$).
2. R_2 tidak simetris karena $0 \leq 1$ tetapi $1 \not\leq 0$ ($0R_21$ tetapi $1\not R_2 0$). R_2 antisimetris karena jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ diperoleh $a = b$.

Latihan: Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

1. R_1 simetris karena untuk sembarang bilangan bulat a dan b berlaku: $aR_1b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow bR_1a$. R_1 tidak antisimetris karena $2^2 = (-2)^2$ dan $(-2)^2 = 2^2$ tetapi $2 \neq -2$ ($2R_1 - 2$ dan $-2R_12$ tetapi $2 \neq -2$). R_1 tidak asimetris karena $2^2 = (-2)^2$ dan $(-2)^2 = 2^2$ ($2R_1 - 2$ tetapi tidak benar bahwa$-2 \not R_1 2$).
2. R_2 tidak simetris karena $0 \leq 1$ tetapi $1 \not\leq 0$ ($0R_21$ tetapi $1 \not R_2 0$). R_2 antisimetris karena jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ diperoleh $a = b$. R_2 tidak asimetris karena $0 \leq 0$.

Latihan: Relasi Simetris, Antisimetris, & Asimetris

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan bulat, tentukan apakah relasi berikut bersifat simetris, antisimetris, asimetris, atau tidak ketiganya.

1. aR_1b jikka $a^2 = b^2$.
2. aR_2b jikka $a \leq b$.
3. aR_3b jikka $a < b$.
4. aR_4b jikka a habis membagi b.

Solusi:

1. R_1 simetris karena untuk sembarang bilangan bulat a dan b berlaku: $aR_1b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow bR_1a$. R_1 tidak antisimetris karena $2^2 = (-2)^2$ dan $(-2)^2 = 2^2$ tetapi $2 \neq -2$ ($2R_1-2$ dan $-2R_12$ tetapi $2 \neq -2$). R_1 tidak asimetris karena $2^2 = (-2)^2$ dan $(-2)^2 = 2^2$ ($2R_1-2$ tetapi tidak benar bahwa$-2\not R_12$).
2. R_2 tidak simetris karena $0 \leq 1$ tetapi $1 \nleq 0$ ($0R_21$ tetapi $1\not R_20$). R_2 antisimetris karena jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ diperoleh $a = b$. R_2 tidak asimetris karena $0 \leq 0$. Perhatikan bahwa jika R_2 asimetris, maka untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ harus berlaku: jika aR_2b maka $b\not R_2a$, termasuk ketika $a = b$.

3. R_3 tidak simetris karena $1 < 2$ tetapi $2 \not< 1$ ($1 R_3 2$ tetapi $2 \not{R}_3 1$).

3. R_3 tidak simetris karena $1 < 2$ tetapi $2 \not< 1$ ($1R_32$ tetapi $2\not{R}_31$). R_3 antisimetris karena tidak ada dua bilangan bulat a dan b yang memenuhi $a < b$ (aR_3b) dan $b < a$ (bR_3a) sekaligus

3. R_3 tidak simetris karena $1 < 2$ tetapi $2 \not< 1$ ($1 R_3 2$ tetapi $2 \not R_3 1$). R_3 antisimetris karena tidak ada dua bilangan bulat a dan b yang memenuhi $a < b$ ($a R_3 b$) dan $b < a$ ($b R_3 a$) sekaligus (ingat kembali bahwa jika hipotesis dari suatu implikasi salah, maka implikasi tersebut selalu benar).

3. R_3 tidak simetris karena $1 < 2$ tetapi $2 \not< 1$ ($1R_32$ tetapi $2 \not{R}_3 1$). R_3 antisimetris karena tidak ada dua bilangan bulat a dan b yang memenuhi $a < b$ (aR_3b) dan $b < a$ (bR_3a) sekaligus (ingat kembali bahwa jika hipotesis dari suatu implikasi salah, maka implikasi tersebut selalu benar). R_3 asimetris karena jika $a < b$ (aR_3b) pastilah $b \not< a$ ($b \not{R}_3 a$).

3. R_3 tidak simetris karena $1 < 2$ tetapi $2 \not< 1$ ($1R_32$ tetapi $2\not R_3 1$). R_3 antisimetris karena tidak ada dua bilangan bulat a dan b yang memenuhi $a < b$ (aR_3b) dan $b < a$ (bR_3a) sekaligus (ingat kembali bahwa jika hipotesis dari suatu implikasi salah, maka implikasi tersebut selalu benar). R_3 asimetris karena jika $a < b$ (aR_3b) pastilah $b \not< a$ ($b\not R_3 a$).
4. R_4 tidak simetris karena 1 habis membagi 2 tetapi 2 tidak habis membagi 1 ($1R_42$ tetapi $2\not R_4 1$).

3. R_3 tidak simetris karena $1 < 2$ tetapi $2 \not< 1$ ($1R_32$ tetapi $2\not R_3 1$). R_3 antisimetris karena tidak ada dua bilangan bulat a dan b yang memenuhi $a < b$ (aR_3b) dan $b < a$ (bR_3a) sekaligus (ingat kembali bahwa jika hipotesis dari suatu implikasi salah, maka implikasi tersebut selalu benar). R_3 asimetris karena jika $a < b$ (aR_3b) pastilah $b \not< a$ ($b\not R_3 a$).
4. R_4 tidak simetris karena 1 habis membagi 2 tetapi 2 tidak habis membagi 1 ($1R_42$ tetapi $2\not R_4 1$). R_4 tidak antisimetris karena 1 habis membagi -1 dan -1 habis membagi 1 tetapi $1 \neq -1$ ($1R_4 - 1$ dan $-1R_41$ tetapi $1 \neq -1$).

3. R_3 tidak simetris karena $1 < 2$ tetapi $2 \not< 1$ ($1R_3 2$ tetapi $2 \not R_3 1$). R_3 antisimetris karena tidak ada dua bilangan bulat a dan b yang memenuhi $a < b$ ($aR_3 b$) dan $b < a$ ($bR_3 a$) sekaligus (ingat kembali bahwa jika hipotesis dari suatu implikasi salah, maka implikasi tersebut selalu benar). R_3 asimetris karena jika $a < b$ ($aR_3 b$) pastilah $b \not< a$ ($b \not R_3 a$).
4. R_4 tidak simetris karena 1 habis membagi 2 tetapi 2 tidak habis membagi 1 ($1R_4 2$ tetapi $2 \not R_4 1$). R_4 tidak antisimetris karena 1 habis membagi -1 dan -1 habis membagi 1 tetapi $1 \neq -1$ ($1R_4 - 1$ dan $-1R_4 1$ tetapi $1 \neq -1$). R_4 tidak asimetris karena 1 habis membagi -1 dan -1 habis membagi 1 ($1R_4 - 1$ tetapi tidak benar bahwa $-1 \not R_4 1$).

Teorema

Setiap relasi yang bersifat asimetris juga bersifat irefleksif.

Bahasan

2. Beberapa Relasi Biner dengan Sifat Khusus
   - Relasi Refleksif dan Irefleksif
   - Relasi Simetris, Antisimetris, dan Asimetris
   - Relasi Transitif

Relasi Transitif

Definisi

Misalkan R adalah suatu relasi biner pada himpunan A, relasi R dikatakan transitif, apabila setiap $a, b, c \in A$ memenuhi: jika aRb **dan** bRc maka aRc, dalam logika predikat R transitif bila formula $\forall a \forall b \forall c \, (aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$ benar.

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$
5. $R_5 = \{(4,4)\}$.

Kita memiliki:

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$
5. $R_5 = \{(4,4)\}$.

Kita memiliki:

1. R_1 transitif karena:

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$
5. $R_5 = \{(4,4)\}$.

Kita memiliki:

1. R_1 transitif karena:
   $(3R_12) \wedge (2R_11) \rightarrow (3R_11)$ bernilai T

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$
5. $R_5 = \{(4,4)\}$.

Kita memiliki:

1. R_1 transitif karena:
   $(3R_12) \wedge (2R_11) \rightarrow (3R_11)$ bernilai T
   $(4R_12) \wedge (2R_11) \rightarrow (4R_11)$ bernilai T

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$
5. $R_5 = \{(4,4)\}$.

Kita memiliki:

1. R_1 transitif karena:
   $(3R_12) \wedge (2R_11) \rightarrow (3R_11)$ bernilai T
   $(4R_12) \wedge (2R_11) \rightarrow (4R_11)$ bernilai T
   $(4R_13) \wedge (3R_11) \rightarrow (4R_11)$ bernilai T

Contoh

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2, R_3, dan R_4 adalah relasi pada A dengan definisi berikut:

1. $R_1 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.
2. $R_2 = \{(1,1), (2,3), (2,4), (4,2)\}$.
3. $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.
4. $R_4 = \{(1,2), (3,4)\}$
5. $R_5 = \{(4,4)\}$.

Kita memiliki:

1. R_1 transitif karena:
   $(3R_12) \wedge (2R_11) \rightarrow (3R_11)$ bernilai T
   $(4R_12) \wedge (2R_11) \rightarrow (4R_11)$ bernilai T
   $(4R_13) \wedge (3R_11) \rightarrow (4R_11)$ bernilai T
   $(4R_13) \wedge (3R_12) \rightarrow (4R_12)$ bernilai T.
   Tidak ada a, b, c yang menyebabkan $(aR_1b) \wedge (bR_1c) \rightarrow (aR_1c)$ bernilai F.

2. R_2 tidak transitif karena $(4R_22) \wedge (2R_23) \rightarrow (4R_23)$ bernilai F, kita juga memiliki *counterexample* yang lain, yaitu $(4R_22) \wedge (2R_24) \rightarrow (4R_24)$ yang bernilai F, demikian pula dengan $(2R_24) \wedge (4R_22) \rightarrow (2R_22)$.

2. R_2 tidak transitif karena $(4R_22) \wedge (2R_23) \rightarrow (4R_23)$ bernilai F, kita juga memiliki *counterexample* yang lain, yaitu $(4R_22) \wedge (2R_24) \rightarrow (4R_24)$ yang bernilai F, demikian pula dengan $(2R_24) \wedge (4R_22) \rightarrow (2R_22)$.
3. R_3 transitif karena tidak ada a, b, dan c yang menyebabkan $(aR_3b) \wedge (bR_3c) \rightarrow (aR_3c)$ bernilai F.

2. R_2 tidak transitif karena $(4R_22) \wedge (2R_23) \rightarrow (4R_23)$ bernilai F, kita juga memiliki *counterexample* yang lain, yaitu $(4R_22) \wedge (2R_24) \rightarrow (4R_24)$ yang bernilai F, demikian pula dengan $(2R_24) \wedge (4R_22) \rightarrow (2R_22)$.
3. R_3 transitif karena tidak ada a, b, dan c yang menyebabkan $(aR_3b) \wedge (bR_3c) \rightarrow (aR_3c)$ bernilai F.
4. R_4 transitif karena tidak ada a, b, dan c yang menyebabkan $(aR_4b) \wedge (bR_4c) \rightarrow (aR_4c)$ bernilai F.

2. R_2 tidak transitif karena $(4R_22) \wedge (2R_23) \rightarrow (4R_23)$ bernilai F, kita juga memiliki *counterexample* yang lain, yaitu $(4R_22) \wedge (2R_24) \rightarrow (4R_24)$ yang bernilai F, demikian pula dengan $(2R_24) \wedge (4R_22) \rightarrow (2R_22)$.
3. R_3 transitif karena tidak ada a, b, dan c yang menyebabkan $(aR_3b) \wedge (bR_3c) \rightarrow (aR_3c)$ bernilai F.
4. R_4 transitif karena tidak ada a, b, dan c yang menyebabkan $(aR_4b) \wedge (bR_4c) \rightarrow (aR_4c)$ bernilai F.
5. R_5 transitif karena tidak ada a, b, dan c yang menyebabkan $(aR_5b) \wedge (bR_5c) \rightarrow (aR_5c)$ bernilai F.

Pembuktian Relasi Transitif

Ingat kembali definisi berikut dari perkuliahan Logika Matematika - A.

Definisi

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, bilangan a dikatakan habis membagi b (atau b habis dibagi a) bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $ka = b$.

Contoh

Kita memiliki:

- 2 habis membagi 6,

Pembuktian Relasi Transitif

Ingat kembali definisi berikut dari perkuliahan Logika Matematika - A.

Definisi

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, bilangan a dikatakan habis membagi b (atau b habis dibagi a) bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $ka = b$.

Contoh

Kita memiliki:

- 2 habis membagi 6, karena terdapat $k = 3$ sehingga $3 \cdot 2 = 6$,
- -2 habis membagi 6,

Pembuktian Relasi Transitif

Ingat kembali definisi berikut dari perkuliahan Logika Matematika - A.

Definisi

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, bilangan a dikatakan habis membagi b (atau b habis dibagi a) bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $ka = b$.

Contoh

Kita memiliki:

- 2 habis membagi 6, karena terdapat $k = 3$ sehingga $3 \cdot 2 = 6$,
- -2 habis membagi 6, karena terdapat $k = -3$ sehingga $-3 \cdot -2 = 6$,
- -7 habis membagi 0,

Pembuktian Relasi Transitif

Ingat kembali definisi berikut dari perkuliahan Logika Matematika - A.

Definisi

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, bilangan a dikatakan habis membagi b (atau b habis dibagi a) bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $ka = b$.

Contoh

Kita memiliki:

- 2 habis membagi 6, karena terdapat $k = 3$ sehingga $3 \cdot 2 = 6$,
- -2 habis membagi 6, karena terdapat $k = -3$ sehingga $-3 \cdot -2 = 6$,
- -7 habis membagi 0, karena terdapat $k = 0$ sehingga $0 \cdot -7 = 0$,
- 11 habis membagi 11,

Pembuktian Relasi Transitif

Ingat kembali definisi berikut dari perkuliahan Logika Matematika - A.

Definisi

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, bilangan a dikatakan habis membagi b (atau b habis dibagi a) bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $ka = b$.

Contoh

Kita memiliki:

- 2 habis membagi 6, karena terdapat $k = 3$ sehingga $3 \cdot 2 = 6$,
- -2 habis membagi 6, karena terdapat $k = -3$ sehingga $-3 \cdot -2 = 6$,
- -7 habis membagi 0, karena terdapat $k = 0$ sehingga $0 \cdot -7 = 0$,
- 11 habis membagi 11, karena terdapat $k = 1$ sehingga $1 \cdot 11 = 11$,
- 6 tidak habis membagi 3,

Pembuktian Relasi Transitif

Ingat kembali definisi berikut dari perkuliahan Logika Matematika - A.

Definisi

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, bilangan a dikatakan habis membagi b (atau b habis dibagi a) bila terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $ka = b$.

Contoh

Kita memiliki:

- 2 habis membagi 6, karena terdapat $k = 3$ sehingga $3 \cdot 2 = 6$,
- -2 habis membagi 6, karena terdapat $k = -3$ sehingga $-3 \cdot -2 = 6$,
- -7 habis membagi 0, karena terdapat $k = 0$ sehingga $0 \cdot -7 = 0$,
- 11 habis membagi 11, karena terdapat $k = 1$ sehingga $1 \cdot 11 = 11$,
- 6 tidak habis membagi 3, karena tidak terdapat $k \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $k \cdot 6 = 3$.

Periksa kebenaran teorema berikut.

Teorema

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dan R adalah relasi pada $\mathbb{Z}$ dengan: aRb jikka a habis membagi b, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$. Relasi R bersifat transitif.

Bukti Ketransitifan Relasi Habis Membagi

Bukti

Akan dibuktikan bahwa:

Bukti Ketransitifan Relasi Habis Membagi

Bukti

Akan dibuktikan bahwa: $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$, atau dalam bahasa Indonesia:

Bukti Ketransitifan Relasi Habis Membagi

Bukti

Akan dibuktikan bahwa: $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$, atau dalam bahasa Indonesia: jika a habis membagi b dan b habis membagi c, maka a habis membagi c.
Misalkan a habis membagi b, maka

Bukti Ketransitifan Relasi Habis Membagi

Bukti

Akan dibuktikan bahwa: $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$, atau dalam bahasa Indonesia: jika a habis membagi b dan b habis membagi c, maka a habis membagi c.
Misalkan a habis membagi b, maka terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $k \cdot a = b$.
Misalkan b habis membagi c, maka

Bukti Ketransitifan Relasi Habis Membagi

Bukti

Akan dibuktikan bahwa: $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$, atau dalam bahasa Indonesia: jika a habis membagi b dan b habis membagi c, maka a habis membagi c.
Misalkan a habis membagi b, maka terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $k \cdot a = b$.
Misalkan b habis membagi c, maka terdapat $\ell \in \mathbb{Z}$ sehingga $\ell \cdot b = c$.
Dari dua persamaan di atas, kita memiliki

Bukti Ketransitifan Relasi Habis Membagi

Bukti

Akan dibuktikan bahwa: $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$, atau dalam bahasa Indonesia: jika a habis membagi b dan b habis membagi c, maka a habis membagi c.
Misalkan a habis membagi b, maka terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $k \cdot a = b$.
Misalkan b habis membagi c, maka terdapat $\ell \in \mathbb{Z}$ sehingga $\ell \cdot b = c$.
Dari dua persamaan di atas, kita memiliki

$$\ell \cdot b = c$$

Bukti Ketransitifan Relasi Habis Membagi

Bukti

Akan dibuktikan bahwa: $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$, atau dalam bahasa Indonesia: jika a habis membagi b dan b habis membagi c, maka a habis membagi c.
Misalkan a habis membagi b, maka terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $k \cdot a = b$.
Misalkan b habis membagi c, maka terdapat $\ell \in \mathbb{Z}$ sehingga $\ell \cdot b = c$.
Dari dua persamaan di atas, kita memiliki

$$\begin{aligned} \ell \cdot b &= c \\ \ell \cdot (k \cdot a) &= c \end{aligned}$$

Bukti Ketransitifan Relasi Habis Membagi

Bukti

Akan dibuktikan bahwa: $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$, atau dalam bahasa Indonesia: jika a habis membagi b dan b habis membagi c, maka a habis membagi c.
Misalkan a habis membagi b, maka terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $k \cdot a = b$.
Misalkan b habis membagi c, maka terdapat $\ell \in \mathbb{Z}$ sehingga $\ell \cdot b = c$.
Dari dua persamaan di atas, kita memiliki

$$\begin{aligned} \ell \cdot b &= c \\ \ell \cdot (k \cdot a) &= c \\ (\ell k) \cdot a &= c, \end{aligned}$$

untuk suatu $\ell k \in \mathbb{Z}$. Akibatnya a habis membagi c. $\square$

Latihan: Relasi Transitif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan real, tentukan apakah relasi berikut bersifat transitif atau tidak

1. xR_1y jikka $x^2 \leq y^2$.
2. xR_2y jikka $x \geq 2y$.
3. xR_3y jikka $xy \geq 0$.
4. xR_4y jikka $x \geq y^2$.

Solusi:

Latihan: Relasi Transitif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan real, tentukan apakah relasi berikut bersifat transitif atau tidak

1. xR_1y jikka $x^2 \leq y^2$.
2. xR_2y jikka $x \geq 2y$.
3. xR_3y jikka $xy \geq 0$.
4. xR_4y jikka $x \geq y^2$.

Solusi:

1. Akan diperiksa apakah R_1 memenuhi sifat jika aR_1b dan bR_1c maka aR_1c.

Latihan: Relasi Transitif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan real, tentukan apakah relasi berikut bersifat transitif atau tidak

1. xR_1y jikka $x^2 \leq y^2$.
2. xR_2y jikka $x \geq 2y$.
3. xR_3y jikka $xy \geq 0$.
4. xR_4y jikka $x \geq y^2$.

Solusi:

1. Akan diperiksa apakah R_1 memenuhi sifat jika aR_1b dan bR_1c maka aR_1c. Asumsikan aR_1b dan bR_1c,

Latihan: Relasi Transitif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan real, tentukan apakah relasi berikut bersifat transitif atau tidak

1. xR_1y jikka $x^2 \leq y^2$.
2. xR_2y jikka $x \geq 2y$.
3. xR_3y jikka $xy \geq 0$.
4. xR_4y jikka $x \geq y^2$.

Solusi:

1. Akan diperiksa apakah R_1 memenuhi sifat jika aR_1b dan bR_1c maka aR_1c. Asumsikan aR_1b dan bR_1c, maka kita memiliki $a^2 \leq b^2$ dan $b^2 \leq c^2$.

Latihan: Relasi Transitif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan real, tentukan apakah relasi berikut bersifat transitif atau tidak

1. xR_1y jikka $x^2 \leq y^2$.
2. xR_2y jikka $x \geq 2y$.
3. xR_3y jikka $xy \geq 0$.
4. xR_4y jikka $x \geq y^2$.

Solusi:

1. Akan diperiksa apakah R_1 memenuhi sifat jika aR_1b dan bR_1c maka aR_1c. Asumsikan aR_1b dan bR_1c, maka kita memiliki $a^2 \leq b^2$ dan $b^2 \leq c^2$. Akibatnya diperoleh $a^2 \leq b^2 \leq c^2$,

Latihan: Relasi Transitif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan real, tentukan apakah relasi berikut bersifat transitif atau tidak

1. xR_1y jikka $x^2 \leq y^2$.
2. xR_2y jikka $x \geq 2y$.
3. xR_3y jikka $xy \geq 0$.
4. xR_4y jikka $x \geq y^2$.

Solusi:

1. Akan diperiksa apakah R_1 memenuhi sifat jika aR_1b dan bR_1c maka aR_1c. Asumsikan aR_1b dan bR_1c, maka kita memiliki $a^2 \leq b^2$ dan $b^2 \leq c^2$. Akibatnya diperoleh $a^2 \leq b^2 \leq c^2$, atau $a^2 \leq c^2$.

Latihan: Relasi Transitif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan real, tentukan apakah relasi berikut bersifat transitif atau tidak

1. xR_1y jikka $x^2 \leq y^2$.
2. xR_2y jikka $x \geq 2y$.
3. xR_3y jikka $xy \geq 0$.
4. xR_4y jikka $x \geq y^2$.

Solusi:

1. Akan diperiksa apakah R_1 memenuhi sifat jika aR_1b dan bR_1c maka aR_1c. Asumsikan aR_1b dan bR_1c, maka kita memiliki $a^2 \leq b^2$ dan $b^2 \leq c^2$. Akibatnya diperoleh $a^2 \leq b^2 \leq c^2$, atau $a^2 \leq c^2$. Dengan demikian diperoleh aR_1c.

Latihan: Relasi Transitif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan real, tentukan apakah relasi berikut bersifat transitif atau tidak

1. xR_1y jikka $x^2 \leq y^2$.
2. xR_2y jikka $x \geq 2y$.
3. xR_3y jikka $xy \geq 0$.
4. xR_4y jikka $x \geq y^2$.

Solusi:

1. Akan diperiksa apakah R_1 memenuhi sifat jika aR_1b dan bR_1c maka aR_1c. Asumsikan aR_1b dan bR_1c, maka kita memiliki $a^2 \leq b^2$ dan $b^2 \leq c^2$. Akibatnya diperoleh $a^2 \leq b^2 \leq c^2$, atau $a^2 \leq c^2$. Dengan demikian diperoleh aR_1c. Jadi R_1 transitif.

Latihan: Relasi Transitif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan real, tentukan apakah relasi berikut bersifat transitif atau tidak

1. xR_1y jikka $x^2 \leq y^2$.
2. xR_2y jikka $x \geq 2y$.
3. xR_3y jikka $xy \geq 0$.
4. xR_4y jikka $x \geq y^2$.

Solusi:

1. Akan diperiksa apakah R_1 memenuhi sifat jika aR_1b dan bR_1c maka aR_1c. Asumsikan aR_1b dan bR_1c, maka kita memiliki $a^2 \leq b^2$ dan $b^2 \leq c^2$. Akibatnya diperoleh $a^2 \leq b^2 \leq c^2$, atau $a^2 \leq c^2$. Dengan demikian diperoleh aR_1c. Jadi R_1 transitif.
2. Akan diperiksa apakah R_2 memenuhi sifat jika aR_2b dan bR_2c maka aR_2c.

Latihan: Relasi Transitif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan real, tentukan apakah relasi berikut bersifat transitif atau tidak

1. xR_1y jikka $x^2 \leq y^2$.
2. xR_2y jikka $x \geq 2y$.
3. xR_3y jikka $xy \geq 0$.
4. xR_4y jikka $x \geq y^2$.

Solusi:

1. Akan diperiksa apakah R_1 memenuhi sifat jika aR_1b dan bR_1c maka aR_1c. Asumsikan aR_1b dan bR_1c, maka kita memiliki $a^2 \leq b^2$ dan $b^2 \leq c^2$. Akibatnya diperoleh $a^2 \leq b^2 \leq c^2$, atau $a^2 \leq c^2$. Dengan demikian diperoleh aR_1c. Jadi R_1 transitif.
2. Akan diperiksa apakah R_2 memenuhi sifat jika aR_2b dan bR_2c maka aR_2c. Tinjau bahwa $-4R_2-2$ (karena $-4 \geq 2(-2)$ atau $-4 \geq -4$) dan $-2R_2-1$ (karena $-2 \geq 2(-1)$ atau $-2 \geq -2$).

Latihan: Relasi Transitif

Latihan

Jika himpunan yang ditinjau adalah himpunan bilangan real, tentukan apakah relasi berikut bersifat transitif atau tidak

1. xR_1y jikka $x^2 \leq y^2$.
2. xR_2y jikka $x \geq 2y$.
3. xR_3y jikka $xy \geq 0$.
4. xR_4y jikka $x \geq y^2$.

Solusi:

1. Akan diperiksa apakah R_1 memenuhi sifat jika aR_1b dan bR_1c maka aR_1c. Asumsikan aR_1b dan bR_1c, maka kita memiliki $a^2 \leq b^2$ dan $b^2 \leq c^2$. Akibatnya diperoleh $a^2 \leq b^2 \leq c^2$, atau $a^2 \leq c^2$. Dengan demikian diperoleh aR_1c. Jadi R_1 transitif.
2. Akan diperiksa apakah R_2 memenuhi sifat jika aR_2b dan bR_2c maka aR_2c. Tinjau bahwa $-4R_2-2$ (karena $-4 \geq 2(-2)$ atau $-4 \geq -4$) dan $-2R_2-1$ (karena $-2 \geq 2(-1)$ atau $-2 \geq -2$). Akan tetapi $-4\not R_2-1$ karena $(-4 \not\geq 2(-1)$ atau $-4 \not\geq -2)$. Jadi R_2 tidak transitif.

3. Akan diperiksa apakah R_3 memenuhi sifat jika aR_3b dan bR_3c maka aR_3c.

3. Akan diperiksa apakah R_3 memenuhi sifat jika aR_3b dan bR_3c maka aR_3c. Tinjau bahwa $-2R_30$ (karena $-2 \cdot 0 \geq 0$) dan $0R_33$ (karena $0 \cdot 3 \geq 0$).

3. Akan diperiksa apakah R_3 memenuhi sifat jika aR_3b dan bR_3c maka aR_3c. Tinjau bahwa $-2R_30$ (karena $-2 \cdot 0 \geq 0$) dan $0R_33$ (karena $0 \cdot 3 \geq 0$). Akan tetapi $-2 \not R_3 3$ karena $-2 \cdot 3 \not\geq 0$.

3. Akan diperiksa apakah R_3 memenuhi sifat jika aR_3b dan bR_3c maka aR_3c. Tinjau bahwa $-2R_30$ (karena $-2 \cdot 0 \geq 0$) dan $0R_33$ (karena $0 \cdot 3 \geq 0$). Akan tetapi $-2\not R_3 3$ karena $-2 \cdot 3 \ngeq 0$. Jadi R_3 tidak transitif.
4. Akan diperiksa apakah R_4 memenuhi sifat jika aR_4b dan bR_4c maka aR_4c.

3. Akan diperiksa apakah R_3 memenuhi sifat jika aR_3b dan bR_3c maka aR_3c. Tinjau bahwa $-2R_30$ (karena $-2 \cdot 0 \geq 0$) dan $0R_33$ (karena $0 \cdot 3 \geq 0$). Akan tetapi $-2\not R_3 3$ karena $-2 \cdot 3 \ngeq 0$. Jadi R_3 tidak transitif.
4. Akan diperiksa apakah R_4 memenuhi sifat jika aR_4b dan bR_4c maka aR_4c. Tinjau bahwa $\frac{1}{4}R_4\frac{1}{2}$ (karena $\frac{1}{4} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$) dan $\frac{1}{2}R_4\frac{1}{\sqrt{3}}$ (karena $\frac{1}{2} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$).

3. Akan diperiksa apakah R_3 memenuhi sifat jika aR_3b dan bR_3c maka aR_3c. Tinjau bahwa $-2R_30$ (karena $-2\cdot 0\geq 0$) dan $0R_33$ (karena $0\cdot 3\geq 0$). Akan tetapi $-2\not R_3 3$ karena $-2\cdot 3\ngeq 0$. Jadi R_3 tidak transitif.
4. Akan diperiksa apakah R_4 memenuhi sifat jika aR_4b dan bR_4c maka aR_4c. Tinjau bahwa $\frac{1}{4}R_4\frac{1}{2}$ (karena $\frac{1}{4}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^2$) dan $\frac{1}{2}R_4\frac{1}{\sqrt{3}}$ (karena $\frac{1}{2}\geq\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$). Akan tetapi $\frac{1}{4}\not R_4\frac{1}{\sqrt{3}}$ (karena $\frac{1}{4}\ngeq\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$).

3. Akan diperiksa apakah R_3 memenuhi sifat jika aR_3b dan bR_3c maka aR_3c. Tinjau bahwa $-2R_30$ (karena $-2 \cdot 0 \geq 0$) dan $0R_33$ (karena $0 \cdot 3 \geq 0$). Akan tetapi $-2\not{R}_33$ karena $-2 \cdot 3 \ngeq 0$. Jadi R_3 tidak transitif.
4. Akan diperiksa apakah R_4 memenuhi sifat jika aR_4b dan bR_4c maka aR_4c. Tinjau bahwa $\frac{1}{4}R_4\frac{1}{2}$ (karena $\frac{1}{4} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$) dan $\frac{1}{2}R_4\frac{1}{\sqrt{3}}$ (karena $\frac{1}{2} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$). Akan tetapi $\frac{1}{4}\not{R}_4\frac{1}{\sqrt{3}}$ (karena $\frac{1}{4} \ngeq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$). Jadi R_4 tidak transitif.

Challenging Problem

Misalkan p dan q adalah dua bilangan bulat dengan $q \neq 0$, p dikatakan habis dibagi q apabila q habis membagi p, yaitu terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $kq = p$.

Contoh

Kita memiliki 2 habis dibagi 2, -2 habis dibagi 2, dan 0 habis dibagi 1.

Challenging Problem

Periksa apakah relasi-relasi berikut bersifat transitif:

1. R adalah relasi pada $\mathbb{Z}$ dengan definisi: aRb jikka $a - b$ habis dibagi 2, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.
2. R adalah relasi pada $\mathbb{Z}$ dengan definisi: aRb jikka $a - b$ tidak habis dibagi 2, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.
3. R adalah relasi pada $\mathbb{Z}$ dengan definisi: aRb jikka ab habis dibagi 3, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.

Bahasan

Sifat-sifat Matriks Representasi Relasi I

Misalkan A adalah suatu himpunan yang memuat n anggota dan R merupakan relasi pada A. Apabila $\mathbf{M}_R$ merupakan matriks representasi untuk R, maka $\mathbf{M}_R$ memiliki sifat-sifat yang merepresentasikan sifat-sifat relasi yang dimiliki oleh R.

1. Jika R refleksif, maka

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Jika R irefleksif, maka

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Sifat-sifat Matriks Representasi Relasi II

3. Jika R simetris, maka $\mathbf{M}_R = (\mathbf{M}_R)^T$, atau dengan perkataan lain $\mathbf{M}_R$ matriks simetris.
4. Jika R antisimetris dan $\mathbf{M}_R = [m_{ij}]$, maka untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ berlaku: jika $i \neq j$, maka $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$.
5. Jika R asimetris dan $\mathbf{M}_R = [m_{ij}]$, maka untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ berlaku: jika $m_{ij} = 1$ maka $m_{ji} = 0$.
6. Jika R transitif dan $\mathbf{M}_R = [m_{ij}]$, maka untuk setiap $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ berlaku: jika $m_{ij} = 1$ **dan** $m_{jk} = 1$ maka haruslah $m_{ik} = 1$.

Latihan: Sifat-sifat Matriks Representasi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi pada himpunan A yang memuat tepat tiga anggota dengan matriks representasi $\mathbf{M}_R$ berikut:

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Periksa apakah

1. R refleksif? R irefleksif?
2. R simetris? R antisimetris? R asimetris?
3. R transitif?

Solusi

1. Seluruh entri diagonal dari $\mathbf{M}_R$ bernilai 1, akibatnya R refleksif.

Solusi

1. Seluruh entri diagonal dari $\mathbf{M}_R$ bernilai 1, akibatnya R refleksif. Jelas bahwa R tidak irefleksif karena entri-entri diagonal dari $\mathbf{M}_R$ tidak seluruhnya bernilai 0.

Solusi

1. Seluruh entri diagonal dari $\mathbf{M}_R$ bernilai 1, akibatnya R refleksif. Jelas bahwa R tidak irefleksif karena entri-entri diagonal dari $\mathbf{M}_R$ tidak seluruhnya bernilai 0.
2. Karena $(\mathbf{M}_R)^T = \mathbf{M}_R$, maka R simetris.

Solusi

1. Seluruh entri diagonal dari $\mathbf{M}_R$ bernilai 1, akibatnya R refleksif. Jelas bahwa R tidak irefleksif karena entri-entri diagonal dari $\mathbf{M}_R$ tidak seluruhnya bernilai 0.
2. Karena $(\mathbf{M}_R)^T = \mathbf{M}_R$, maka R simetris. Relasi R tidak antisimetris karena $m_{12} = 1$ dan $m_{21} = 1$.

Solusi

1. Seluruh entri diagonal dari $\mathbf{M}_R$ bernilai 1, akibatnya R refleksif. Jelas bahwa R tidak irefleksif karena entri-entri diagonal dari $\mathbf{M}_R$ tidak seluruhnya bernilai 0.
2. Karena $(\mathbf{M}_R)^T = \mathbf{M}_R$, maka R simetris. Relasi R tidak antisimetris karena $m_{12} = 1$ dan $m_{21} = 1$. Relasi R juga tidak asimetris karena $m_{12} = 1$ tetapi $m_{21} \neq 0$.

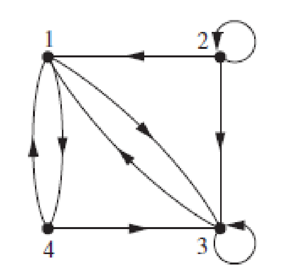
Solusi

1. Seluruh entri diagonal dari $\mathbf{M}_R$ bernilai 1, akibatnya R refleksif. Jelas bahwa R tidak irefleksif karena entri-entri diagonal dari $\mathbf{M}_R$ tidak seluruhnya bernilai 0.
2. Karena $(\mathbf{M}_R)^T = \mathbf{M}_R$, maka R simetris. Relasi R tidak antisimetris karena $m_{12} = 1$ dan $m_{21} = 1$. Relasi R juga tidak asimetris karena $m_{12} = 1$ tetapi $m_{21} \neq 0$.
3. R tidak transitif karena $m_{12} = 1$ dan $m_{23} = 1$ tetapi $m_{13} = 0$.

Latihan

Latihan

Tentukan matriks representasi untuk relasi R yang memiliki digraf berikut:



Apakah R bersifat refleksif? irefleksif? simetris? antisimetris? asimetris? transitif?

Solusi

Jika R memiliki matriks representasi $\mathbf{M}_R$, maka $\mathbf{M}_R =$

Solusi

Jika R memiliki matriks representasi $\mathbf{M}_R$, maka $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solusi

Jika R memiliki matriks representasi $\mathbf{M}_R$, maka $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. R tidak refleksif (karena $m_{11} = 0$) dan

Solusi

Jika R memiliki matriks representasi $\mathbf{M}_R$, maka $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. R tidak refleksif (karena $m_{11} = 0$) dan tidak irefleksif (karena $m_{22} = 1$).

Solusi

Jika R memiliki matriks representasi $\mathbf{M}_R$, maka $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. R tidak refleksif (karena $m_{11} = 0$) dan tidak irefleksif (karena $m_{22} = 1$). R tidak simetris (karena $m_{21} = 1$ tetapi $m_{12} = 0$),

Solusi

Jika R memiliki matriks representasi $\mathbf{M}_R$, maka $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. R tidak refleksif (karena $m_{11} = 0$) dan tidak irefleksif (karena $m_{22} = 1$). R tidak simetris (karena $m_{21} = 1$ tetapi $m_{12} = 0$), R tidak antisimetris (karena $m_{13} = m_{31} = 1$ dan $1 \neq 3$),

Solusi

Jika R memiliki matriks representasi $\mathbf{M}_R$, maka $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. R tidak refleksif (karena $m_{11} = 0$) dan tidak irefleksif (karena $m_{22} = 1$). R tidak simetris (karena $m_{21} = 1$ tetapi $m_{12} = 0$), R tidak antisimetris (karena $m_{13} = m_{31} = 1$ dan $1 \neq 3$), R tidak asimetris (karena $m_{13} = 1$ dan $m_{31} = 1$).

Solusi

Jika R memiliki matriks representasi $\mathbf{M}_R$, maka $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. R tidak refleksif (karena $m_{11} = 0$) dan tidak irefleksif (karena $m_{22} = 1$). R tidak simetris (karena $m_{21} = 1$ tetapi $m_{12} = 0$), R tidak antisimetris (karena $m_{13} = m_{31} = 1$ dan $1 \neq 3$), R tidak asimetris (karena $m_{13} = 1$ dan $m_{31} = 1$). R tidak transitif (karena $m_{14} = 1$ dan $m_{41} = 1$ tetapi $m_{11} = 0$).

Bahasan

Sifat-sifat Digraf Representasi Relasi

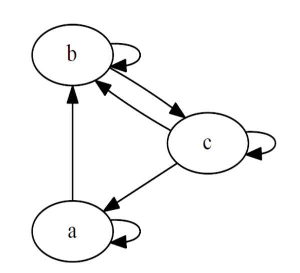
Apabila R merupakan suatu relasi pada himpunan A yang berhingga, maka beberapa sifat yang dimiliki oleh relasi R dapat dilihat melalui digrafnya.

1. R refleksif jikka terdapat gelang di setiap simpul pada digraf representasi R.
2. R irefleksif jikka tidak terdapat gelang di setiap simpul pada digraf representasi R.
3. R simetris jikka setiap dua simpul berbeda pada digraf representasi R dihubungkan oleh dua sisi yang arahnya berlawanan.
4. R antisimetris jikka tidak terdapat dua simpul **berbeda** pada digraf representasi R yang dihubungkan oleh dua sisi yang arahnya berlawanan.
5. R asimetris jikka tidak terdapat dua simpul yang dihubungkan oleh dua sisi berbeda yang berlawanan arah **dan** tidak terdapat gelang di setiap simpul yang ada pada digraf representasi R.
6. R transitif jikka untuk setiap $a, b, c \in V$ berlaku: jika terdapat sisi dari a ke b dan dari b ke c maka terdapat sisi dari a ke c.

Latihan

Latihan

Tentukan apakah relasi S yang representasi digrafnya terdapat pada gambar berikut



Gambar Digraf untuk Relasi S.

bersifat refleksif? irefleksif? simetris? antisimetris? asimetris? transitif?

Solusi Latihan 6

Solusi: Perhatikan bahwa digraf representasi relasi S terdiri atas tiga simpul, yaitu a, b, c.

Solusi Latihan 6

Solusi: Perhatikan bahwa digraf representasi relasi S terdiri atas tiga simpul, yaitu a, b, c.

- S refleksif karena digraf representasinya memuat gelang pada simpul a, b, dan c.

Solusi Latihan 6

Solusi: Perhatikan bahwa digraf representasi relasi S terdiri atas tiga simpul, yaitu a, b, c.

- S refleksif karena digraf representasinya memuat gelang pada simpul a, b, dan c. Jelas bahwa relasi S tidak irefleksif.

Solusi Latihan 6

Solusi: Perhatikan bahwa digraf representasi relasi S terdiri atas tiga simpul, yaitu a, b, c.

- S refleksif karena digraf representasinya memuat gelang pada simpul a, b, dan c. Jelas bahwa relasi S tidak irefleksif.
- S tidak simetris karena sisi yang menghubungkan a dan b hanya ada satu.

Solusi Latihan 6

Solusi: Perhatikan bahwa digraf representasi relasi S terdiri atas tiga simpul, yaitu a, b, c.

- S refleksif karena digraf representasinya memuat gelang pada simpul a, b, dan c. Jelas bahwa relasi S tidak irefleksif.
- S tidak simetris karena sisi yang menghubungkan a dan b hanya ada satu. Kemudian relasi S tidak antisimetris karena b terhubung dengan c oleh dua sisi yang arahnya berlawanan.

Solusi Latihan 6

Solusi: Perhatikan bahwa digraf representasi relasi S terdiri atas tiga simpul, yaitu a, b, c.

- S refleksif karena digraf representasinya memuat gelang pada simpul a, b, dan c. Jelas bahwa relasi S tidak irefleksif.
- S tidak simetris karena sisi yang menghubungkan a dan b hanya ada satu. Kemudian relasi S tidak antisimetris karena b terhubung dengan c oleh dua sisi yang arahnya berlawanan. Relasi S juga tidak asimetris karena digraf representasinya memuat gelang.

Solusi Latihan 6

Solusi: Perhatikan bahwa digraf representasi relasi S terdiri atas tiga simpul, yaitu a, b, c.

- S refleksif karena digraf representasinya memuat gelang pada simpul a, b, dan c. Jelas bahwa relasi S tidak irefleksif.
- S tidak simetris karena sisi yang menghubungkan a dan b hanya ada satu. Kemudian relasi S tidak antisimetris karena b terhubung dengan c oleh dua sisi yang arahnya berlawanan. Relasi S juga tidak asimetris karena digraf representasinya memuat gelang.
- Relasi S tidak transitif karena **tidak** terdapat sisi yang menghubungkan b ke a (dengan arah $b \to a$), padahal terdapat sisi yang menghubungkan b ke c (dengan arah $b \to c$) dan sisi yang menghubungkan c ke a (dengan arah $c \to a$).

Bahasan

Komposisi Relasi (Produk Relasi)

Definisi

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi atau produk dari dua relasi R dan S dinotasikan dengan $S \circ R$ dan didefinisikan sebagai

$$S \circ R = \left\{ \begin{array}{l} (a, c) \mid a \in A, c \in C, \\ \text{terdapat } b \in B \text{ dengan sifat } (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S \end{array} \right\}.$$

Jadi $S \circ R$ adalah relasi dari A ke C.

Menentukan Komposisi Relasi via Diagram Panah

Komposisi relasi $S \circ R$ dapat ditentukan melalui diagram panah.

Contoh

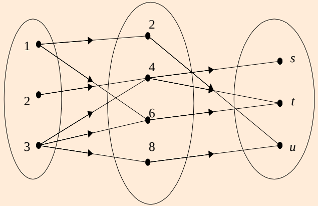
Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, dan $C = \{s, t, u\}$. Misalkan R adalah relasi dari A ke B dengan $R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$ dan S adalah relasi dari B ke C dengan $S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$. Diagram panah yang menggambarkan $S \circ R$ adalah

Menentukan Komposisi Relasi via Diagram Panah

Komposisi relasi $S \circ R$ dapat ditentukan melalui diagram panah.

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, dan $C = \{s, t, u\}$. Misalkan R adalah relasi dari A ke B dengan $R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$ dan S adalah relasi dari B ke C dengan $S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$. Diagram panah yang menggambarkan $S \circ R$ adalah



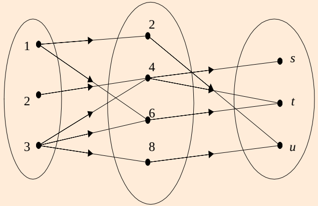
Akibatnya $S \circ R =$

Menentukan Komposisi Relasi via Diagram Panah

Komposisi relasi $S \circ R$ dapat ditentukan melalui diagram panah.

Contoh

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, dan $C = \{s, t, u\}$. Misalkan R adalah relasi dari A ke B dengan $R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$ dan S adalah relasi dari B ke C dengan $S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$.
Diagram panah yang menggambarkan $S \circ R$ adalah



Akibatnya $S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u)\}$.

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1, 2, 3\}$ ke $\{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1, 2, 3, 4\}$ ke $\{0, 1, 2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1, 2, 3\}$ ke $\{0, 1, 2\}$.

Solusi:

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1, 2, 3\}$ ke $\{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1, 2, 3, 4\}$ ke $\{0, 1, 2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1, 2, 3\}$ ke $\{0, 1, 2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a, c), dengan sifat $a \in \{1, 2, 3\}$, $c \in \{0, 1, 2\}$, dan terdapat $b \in \{1, 2, 3, 4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc.

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{0,1,2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a,c), dengan sifat $a \in \{1,2,3\}$, $c \in \{0,1,2\}$, dan terdapat $b \in \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc. Perhatikan bahwa

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{0,1,2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a,c), dengan sifat $a \in \{1,2,3\}$, $c \in \{0,1,2\}$, dan terdapat $b \in \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc. Perhatikan bahwa

- Untuk $a = 1$, kita memiliki $1Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$.

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{0,1,2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a,c), dengan sifat $a \in \{1,2,3\}$, $c \in \{0,1,2\}$, dan terdapat $b \in \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc. Perhatikan bahwa

- Untuk $a = 1$, kita memiliki $1Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{0,1,2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a,c), dengan sifat $a \in \{1,2,3\}$, $c \in \{0,1,2\}$, dan terdapat $b \in \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc. Perhatikan bahwa

- Untuk $a = 1$, kita memiliki $1Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh $(1,0) \in S \circ R$ dan $(1,1) \in S \circ R$.

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{0,1,2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a,c), dengan sifat $a \in \{1,2,3\}$, $c \in \{0,1,2\}$, dan terdapat $b \in \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc. Perhatikan bahwa

- Untuk $a = 1$, kita memiliki $1Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh $(1,0) \in S \circ R$ dan $(1,1) \in S \circ R$.
- Untuk $a = 2$, kita memiliki $2R3$.

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{0,1,2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a,c), dengan sifat $a \in \{1,2,3\}$, $c \in \{0,1,2\}$, dan terdapat $b \in \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc. Perhatikan bahwa

- Untuk $a = 1$, kita memiliki $1Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh $(1,0) \in S \circ R$ dan $(1,1) \in S \circ R$.
- Untuk $a = 2$, kita memiliki $2R3$. Karena $3S1$ dan $3S2$, maka diperoleh

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{0,1,2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a,c), dengan sifat $a \in \{1,2,3\}$, $c \in \{0,1,2\}$, dan terdapat $b \in \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc. Perhatikan bahwa

- Untuk $a = 1$, kita memiliki $1Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh $(1,0) \in S \circ R$ dan $(1,1) \in S \circ R$.
- Untuk $a = 2$, kita memiliki $2R3$. Karena $3S1$ dan $3S2$, maka diperoleh $(2,1) \in S \circ R$ dan $(2,2) \in S \circ R$.

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{0,1,2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a,c), dengan sifat $a \in \{1,2,3\}$, $c \in \{0,1,2\}$, dan terdapat $b \in \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc. Perhatikan bahwa

- Untuk $a = 1$, kita memiliki $1Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh $(1,0) \in S \circ R$ dan $(1,1) \in S \circ R$.
- Untuk $a = 2$, kita memiliki $2R3$. Karena $3S1$ dan $3S2$, maka diperoleh $(2,1) \in S \circ R$ dan $(2,2) \in S \circ R$.
- Untuk $a = 3$, kita memiliki $3Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$.

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{0,1,2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a,c), dengan sifat $a \in \{1,2,3\}$, $c \in \{0,1,2\}$, dan terdapat $b \in \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc. Perhatikan bahwa

- Untuk $a = 1$, kita memiliki $1Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh $(1,0) \in S \circ R$ dan $(1,1) \in S \circ R$.
- Untuk $a = 2$, kita memiliki $2R3$. Karena $3S1$ dan $3S2$, maka diperoleh $(2,1) \in S \circ R$ dan $(2,2) \in S \circ R$.
- Untuk $a = 3$, kita memiliki $3Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{0,1,2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a,c), dengan sifat $a \in \{1,2,3\}$, $c \in \{0,1,2\}$, dan terdapat $b \in \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc. Perhatikan bahwa

- Untuk $a = 1$, kita memiliki $1Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh $(1,0) \in S \circ R$ dan $(1,1) \in S \circ R$.
- Untuk $a = 2$, kita memiliki $2R3$. Karena $3S1$ dan $3S2$, maka diperoleh $(2,1) \in S \circ R$ dan $(2,2) \in S \circ R$.
- Untuk $a = 3$, kita memiliki $3Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh $(3,0) \in S \circ R$ dan $(3,1) \in S \circ R$.

Jadi $S \circ R =$

Latihan: Komposisi Relasi

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)\}$. Tentukan $S \circ R$ yang merupakan relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{0,1,2\}$.

Solusi: Elemen-elemen $S \circ R$ adalah seluruh pasangan terurut (a,c), dengan sifat $a \in \{1,2,3\}$, $c \in \{0,1,2\}$, dan terdapat $b \in \{1,2,3,4\}$ yang memenuhi aRb dan bSc. Perhatikan bahwa

- Untuk $a = 1$, kita memiliki $1Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh $(1,0) \in S \circ R$ dan $(1,1) \in S \circ R$.
- Untuk $a = 2$, kita memiliki $2R3$. Karena $3S1$ dan $3S2$, maka diperoleh $(2,1) \in S \circ R$ dan $(2,2) \in S \circ R$.
- Untuk $a = 3$, kita memiliki $3Rb$ untuk $b \in \{1,4\}$. Karena $1S0$ dan $4S1$, maka diperoleh $(3,0) \in S \circ R$ dan $(3,1) \in S \circ R$.

Jadi $S \circ R = \{(1,0), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1)\}$.

Latihan

Misalkan R dan S adalah relasi pada $A = \{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $a, b \in A$,

1. aRb jikka $b = 5 - a$,
2. aSb jikka $a < b$.

Tentukan $S \circ R$.

Solusi: Perhatikan bahwa:

Latihan

Misalkan R dan S adalah relasi pada $A = \{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $a, b \in A$,

1. aRb jikka $b = 5 - a$,
2. aSb jikka $a < b$.

Tentukan $S \circ R$.

Solusi: Perhatikan bahwa:

- R mengaitkan setiap $a \in A$ dengan $(5 - a) \in A$.

Latihan

Misalkan R dan S adalah relasi pada $A = \{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $a, b \in A$,

1. aRb jikka $b = 5 - a$,
2. aSb jikka $a < b$.

Tentukan $S \circ R$.

Solusi: Perhatikan bahwa:

- R mengaitkan setiap $a \in A$ dengan $(5 - a) \in A$.
- Selanjutnya $(5 - a) \in A$ dikaitkan oleh S dengan anggota A yang lebih besar dari $(5 - a)$.

Latihan

Misalkan R dan S adalah relasi pada $A = \{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $a, b \in A$,

1. aRb jikka $b = 5 - a$,
2. aSb jikka $a < b$.

Tentukan $S \circ R$.

Solusi: Perhatikan bahwa:

- R mengaitkan setiap $a \in A$ dengan $(5 - a) \in A$.
- Selanjutnya $(5 - a) \in A$ dikaitkan oleh S dengan anggota A yang lebih besar dari $(5 - a)$.
- Dengan perkataan lain $S \circ R$ berisi semua pasangan terurut (a, b) dengan sifat $b > 5 - a$, atau $a + b > 5$, sehingga
  $S \circ R = \{(a, b) \mid a, b \in A$ dan

Latihan

Misalkan R dan S adalah relasi pada $A = \{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $a, b \in A$,

1. aRb jikka $b = 5 - a$,
2. aSb jikka $a < b$.

Tentukan $S \circ R$.

Solusi: Perhatikan bahwa:

- R mengaitkan setiap $a \in A$ dengan $(5 - a) \in A$.
- Selanjutnya $(5 - a) \in A$ dikaitkan oleh S dengan anggota A yang lebih besar dari $(5 - a)$.
- Dengan perkataan lain $S \circ R$ berisi semua pasangan terurut (a, b) dengan sifat $b > 5 - a$, atau $a + b > 5$, sehingga $S \circ R = \{(a, b) \mid a, b \in A \text{ dan } a + b > 5\}$.

Jadi $S \circ R = \{(2,4), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.

Sifat Asosiatif Komposisi Relasi

Teorema

Operasi komposisi relasi bersifat asosiatif, artinya apabila A, B, C, D adalah empat himpunan, kemudian

- R relasi dari A ke B,
- S relasi dari B ke C,
- T relasi dari C ke D,

maka kita memiliki

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

Menentukan Komposisi Relasi via Matriks Representasi

Definisi (Hasil Kali Boolean (*Boolean Product*))

Misalkan $\mathbf{A}$ adalah matriks $0-1$ berukuran $m \times n$ dan $\mathbf{B}$ adalah matriks $0-1$ berukuran $n \times p$. Hasil kali boolean (*boolean product*)dari $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$, dinotasikan dengan $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$, didefinisikan sebagai matriks $m \times p$ yang entri ke pada baris ke-i dan kolom ke-j nya adalah

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B}[i,j] = \bigvee_{k=1}^{n} \mathbf{A}[i,k] \wedge \mathbf{B}[k,j].$$

.

Hasil kali boolean pada antara dua matriks biner pada dasarnya sama dengan hasil kali matriks biasa (yang dijelaskan di kuliah Aljabar Linier), namun operasi $+$ dan $\cdot$ didefinisikan sebagai berikut

$+$	$\cdot$
$1+1=1$	$1\cdot 1=1$
$1+0=1$	$1\cdot 0=0$
$0+1=1$	$0\cdot 1=0$
$0+0=0$	$0\cdot 0=0$

Matriks Representasi untuk $S \circ R$

Teorema

Misalkan A, B, C adalah tiga himpunan berhingga serta R adalah relasi dari A ke B dan S adalah relasi dari B ke C. Misalkan pula matriks representasi untuk R dan S berturut-turut adalah $\mathbf{M}_R$ dan $\mathbf{M}_S$. Apabila $S \circ R$ adalah relasi dari A ke C dan $\mathbf{M}_{S \circ R}$ adalah matriks representasi untuk $S \circ R$, maka

$$\mathbf{M}_{S \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S.$$

Latihan

Latihan

Tentukan matriks representasi untuk relasi $S \circ R$ apabila diketahui matriks representasi untuk R dan S adalah sebagai berikut

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solusi: Misalkan $\mathbf{M}_{S \circ R}$ adalah matriks representasi untuk $S \circ R$, maka

$$\mathbf{M}_{S \circ R} \quad =$$

Solusi: Misalkan $\mathbf{M}_{S \circ R}$ adalah matriks representasi untuk $S \circ R$, maka

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{S \circ R} &= \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S \\ &= \end{aligned}$$

Solusi: Misalkan $\mathbf{M}_{S \circ R}$ adalah matriks representasi untuk $S \circ R$, maka

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{S \circ R} &= \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&=
\end{aligned}
$$

Solusi: Misalkan $\mathbf{M}_{S\circ R}$ adalah matriks representasi untuk $S \circ R$, maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{S\circ R} &= \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0+0+1 & 1+0+0 & 0+0+1 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & 0+1+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{bmatrix} \\
&=
\end{aligned}$$

Solusi: Misalkan $\mathbf{M}_{S\circ R}$ adalah matriks representasi untuk $S \circ R$, maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{S\circ R} &= \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0+0+1 & 1+0+0 & 0+0+1 \\ 0+0+0 & 1+0+0 & 0+1+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Latihan

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$. Tentukan matriks representasi untuk relasi $S \circ R$.

Solusi: $\mathbf{M}_R =$

Latihan

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1, 2, 3\}$ ke $\{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1, 2, 3, 4\}$ ke $\{0, 1, 2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$. Tentukan matriks representasi untuk relasi $S \circ R$.

Solusi: $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_S =$

Latihan

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $R = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)\}$. Tentukan matriks representasi untuk relasi $S \circ R$.

Solusi: $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{M}_{S \circ R} =$

Latihan

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1, 2, 3\}$ ke $\{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1, 2, 3, 4\}$ ke $\{0, 1, 2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$. Tentukan matriks representasi untuk relasi $S \circ R$.

Solusi: $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{M}_{S \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S =$

Latihan

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$. Tentukan matriks representasi untuk relasi $S \circ R$.

Solusi: $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{M}_{S \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

Latihan

Latihan

Misalkan R adalah relasi dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3,4\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$. Misalkan pula S adalah relasi dari $\{1,2,3,4\}$ ke $\{0,1,2\}$ yang didefinisikan sebagai berikut $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$. Tentukan matriks representasi untuk relasi $S \circ R$.

Solusi: $\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{M}_{S \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$