Teori Bilangan Elementer Bagian 1

Keterbagian (*Divisibility*) – Representasi Bilangan dalam Basis b

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

Juni 2023

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications*, Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Mathematics for Computer Science*. MIT, 2010, oleh E. Lehman, F. T. Leighton, A. R. Meyer.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 2 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
5. Slide kuliah Matematika Diskret 1 di Fasilkom UI oleh A. A. Krisnadhi.
6. *Slide* kuliah Matematika Diskrit di Telkom University oleh B. Purnama.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

Bahasan

Bahasan

Mengapa Perlu Belajar Teori Bilangan?

Teori bilangan diterapkan dalam beberapa kajian yang diperlukan dalam *computer science*, contohnya:

Mengapa Perlu Belajar Teori Bilangan?

Teori bilangan diterapkan dalam beberapa kajian yang diperlukan dalam *computer science*, contohnya:

1. cara membangun sebuah algoritma untuk membangkitkan bilangan acak pada komputer (*pseudo-random number generation*),

Mengapa Perlu Belajar Teori Bilangan?

Teori bilangan diterapkan dalam beberapa kajian yang diperlukan dalam *computer science*, contohnya:

1. cara membangun sebuah algoritma untuk membangkitkan bilangan acak pada komputer (*pseudo-random number generation*),
2. cara membangun protokol keamanan (*cryptosystem*) atau protokol pertukaran kunci (*key exchange protocol*),

Mengapa Perlu Belajar Teori Bilangan?

Teori bilangan diterapkan dalam beberapa kajian yang diperlukan dalam *computer science*, contohnya:

1. cara membangun sebuah algoritma untuk membangkitkan bilangan acak pada komputer (*pseudo-random number generation*),
2. cara membangun protokol keamanan (*cryptosystem*) atau protokol pertukaran kunci (*key exchange protocol*),
3. cara memformulasikan algoritma yang terkait dengan bilangan bulat (perhitungan faktor persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil).

Contoh Aplikasi Teori Bilangan: Protokol Diffie-Hellman

Number Theory in Competitive Programming

Inti Sets

by *IEEEXtreme*

Problem | Submissions | Leaderboard | Discussions

In order to motivate his Peruvian students, a teacher includes words in the Quechua language in his math class.

Today, he defined a curious set for a given positive integer N. He called this set, an ***Inti set***, and defined it as the set of all positive integer numbers that have the number *1* as their single common positive divisor with number N.

The math class about Inti sets was amazing. After class, the students try to challenge to teacher. They each ask questions like this: "Could you tell me the sum of all numbers, between A and B (inclusive), that are in the Inti set of N?"

Since the teacher is tired and he's sure that you are the best in class, he wants to know if you can help him.

Input Format

The first line of input contains an integer Q, $1 \le Q \le 20$, representing the number of students. Each of the next Q lines contain three space-separated integers N, A and B, which represent a query.

Constraints

$1 \le A \le B \le N \le 10^{12}$

Output Format

The output is exactly Q lines, one per student query. For each query you need to find the sum of all numbers between A and B, that are in the Inti set of N, and print the sum modulo 1000000007.

Number Theory in Competitive Programming

2013 World Finals
acm International Collegiate Programming Contest
IBM event sponsor
ICPC 2013 St. Petersburg hosted by ITMO

Problem D
Factors
Time Limit: 2 seconds

The fundamental theorem of arithmetic states that every integer greater than 1 can be uniquely represented as a product of one or more primes. While unique, several arrangements of the prime factors may be possible. For example:

$$\begin{aligned} 10 &= 2 \cdot 5 \\ &= 5 \cdot 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 20 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Let $f(k)$ be the number of different arrangements of the prime factors of k. So $f(10) = 2$ and $f(20) = 3$.

Given a positive number n, there always exists at least one number k such that $f(k) = n$. We want to know the smallest such k.

Bahasan

Keterbagian (*Divisibility*) pada $\mathbb{Z}$

Kita memiliki $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Kemudian himpunan seluruh bilangan bulat *positif* akan ditulis dengan $\mathbb{Z}^+$. Misalkan a dan b adalah dua bilangan bulat. Hasil dari a/b *belum tentu* juga berupa bilangan bulat. Sebagai contoh $12/6 = 2 \in \mathbb{Z}$ tetapi $12/5 = 2.4 \notin \mathbb{Z}$.

Definisi (Keterbagian (*Divisibility*))

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, maka:

Keterbagian (*Divisibility*) pada $\mathbb{Z}$

Kita memiliki $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Kemudian himpunan seluruh bilangan bulat *positif* akan ditulis dengan $\mathbb{Z}^+$. Misalkan a dan b adalah dua bilangan bulat. Hasil dari a/b *belum tentu* juga berupa bilangan bulat. Sebagai contoh $12/6 = 2 \in \mathbb{Z}$ tetapi $12/5 = 2.4 \notin \mathbb{Z}$.

Definisi (Keterbagian (*Divisibility*))

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, maka:

1. Kita katakan a (*habis*) *membagi* b, ditulis dengan $a|b$, apabila terdapat $k \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $b = k \cdot a$.

Keterbagian (*Divisibility*) pada $\mathbb{Z}$

Kita memiliki $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Kemudian himpunan seluruh bilangan bulat *positif* akan ditulis dengan $\mathbb{Z}^+$. Misalkan a dan b adalah dua bilangan bulat. Hasil dari a/b *belum tentu* juga berupa bilangan bulat. Sebagai contoh $12/6 = 2 \in \mathbb{Z}$ tetapi $12/5 = 2.4 \notin \mathbb{Z}$.

Definisi (Keterbagian (*Divisibility*))

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, maka:

1. Kita katakan a (*habis*) *membagi* b, ditulis dengan $a|b$, apabila terdapat $k \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $b = k \cdot a$.
2. Apabila $a|b$, maka a dikatakan sebagai faktor atau pembagi dari b, dan b dikatakan sebagai kelipatan dari a.

Keterbagian (*Divisibility*) pada $\mathbb{Z}$

Kita memiliki $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Kemudian himpunan seluruh bilangan bulat *positif* akan ditulis dengan $\mathbb{Z}^+$. Misalkan a dan b adalah dua bilangan bulat. Hasil dari a/b *belum tentu* juga berupa bilangan bulat. Sebagai contoh $12/6 = 2 \in \mathbb{Z}$ tetapi $12/5 = 2.4 \notin \mathbb{Z}$.

Definisi (Keterbagian (*Divisibility*))

Diberikan dua bilangan bulat a dan b dengan $a \neq 0$, maka:

1. Kita katakan a (*habis*) *membagi* b, ditulis dengan $a|b$, apabila terdapat $k \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $b = k \cdot a$.
2. Apabila $a|b$, maka a dikatakan sebagai faktor atau pembagi dari b, dan b dikatakan sebagai kelipatan dari a.
3. Notasi $a \nmid b$ menyatakan bahwa a tidak (habis) membagi b.

Perhatikan bahwa $a|b$ setara dengan formula logika predikat $\exists k\,(ka = b)$ yang himpunan semestanya adalah himpunan seluruh bilangan bulat.

Contoh

Kita memiliki

Contoh

Kita memiliki

1. $2|4$ karena terdapat $k = 2$ sehingga $4 = 2 \cdot (2)$

Contoh

Kita memiliki

1. $2|4$ karena terdapat $k = 2$ sehingga $4 = 2 \cdot (2)$
2. $4| - 8$ karena terdapat $k = -2$ sehingga $-8 = 4 \cdot (-2)$

Contoh

Kita memiliki

1. $2|4$ karena terdapat $k = 2$ sehingga $4 = 2 \cdot (2)$
2. $4|-8$ karena terdapat $k = -2$ sehingga $-8 = 4 \cdot (-2)$
3. $7|0$ karena terdapat $k = 0$ sehingga $0 = 7 \cdot (0)$

Contoh

Kita memiliki

1. $2|4$ karena terdapat $k = 2$ sehingga $4 = 2 \cdot (2)$
2. $4|-8$ karena terdapat $k = -2$ sehingga $-8 = 4 \cdot (-2)$
3. $7|0$ karena terdapat $k = 0$ sehingga $0 = 7 \cdot (0)$
4. $2 \nmid 1$ karena tidak ada bilangan bulat k sehingga $1 = 2k$

Contoh

Kita memiliki

1. $2|4$ karena terdapat $k = 2$ sehingga $4 = 2 \cdot (2)$
2. $4| - 8$ karena terdapat $k = -2$ sehingga $-8 = 4 \cdot (-2)$
3. $7|0$ karena terdapat $k = 0$ sehingga $0 = 7 \cdot (0)$
4. $2 \nmid 1$ karena tidak ada bilangan bulat k sehingga $1 = 2k$
5. $4 \nmid 7$ karena tidak ada bilangan bulat k sehingga $7 = 4k$

Contoh

Kita memiliki

1. $2|4$ karena terdapat $k = 2$ sehingga $4 = 2 \cdot (2)$
2. $4|-8$ karena terdapat $k = -2$ sehingga $-8 = 4 \cdot (-2)$
3. $7|0$ karena terdapat $k = 0$ sehingga $0 = 7 \cdot (0)$
4. $2 \nmid 1$ karena tidak ada bilangan bulat k sehingga $1 = 2k$
5. $4 \nmid 7$ karena tidak ada bilangan bulat k sehingga $7 = 4k$
6. $8 \nmid -4$ karena tidak terdapat bilangan bulat k sehingga $-4 = 8k$

Latihan: Keterbagian

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan-pernyataan berikut:

1. 6 membagi 54
2. -27 kelipatan dari 3
3. 3 membagi 91
4. 17 kelipatan dari -3
5. 4 membagi 0

Solusi:

Latihan: Keterbagian

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan-pernyataan berikut:

1. 6 membagi 54
2. -27 kelipatan dari 3
3. 3 membagi 91
4. 17 kelipatan dari -3
5. 4 membagi 0

Solusi:

1. Benar, karena terdapat $k = 9$ sehingga $6 \cdot 9 = 54$.

Latihan: Keterbagian

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan-pernyataan berikut:

1. 6 membagi 54
2. -27 kelipatan dari 3
3. 3 membagi 91
4. 17 kelipatan dari -3
5. 4 membagi 0

Solusi:

1. Benar, karena terdapat $k = 9$ sehingga $6 \cdot 9 = 54$.
2. Benar, karena terdapat $k = -9$ sehingga $3 \cdot (-9) = -27$.

Latihan: Keterbagian

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan-pernyataan berikut:

1. 6 membagi 54
2. -27 kelipatan dari 3
3. 3 membagi 91
4. 17 kelipatan dari -3
5. 4 membagi 0

Solusi:

1. Benar, karena terdapat $k = 9$ sehingga $6 \cdot 9 = 54$.
2. Benar, karena terdapat $k = -9$ sehingga $3 \cdot (-9) = -27$.
3. Salah, karena tidak terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $3 \cdot k = 91$ (karena $91/3 = 30\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$).

Latihan: Keterbagian

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan-pernyataan berikut:

1. 6 membagi 54
2. -27 kelipatan dari 3
3. 3 membagi 91
4. 17 kelipatan dari -3
5. 4 membagi 0

Solusi:

1. Benar, karena terdapat $k = 9$ sehingga $6 \cdot 9 = 54$.
2. Benar, karena terdapat $k = -9$ sehingga $3 \cdot (-9) = -27$.
3. Salah, karena tidak terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $3 \cdot k = 91$ (karena $91/3 = 30\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$).
4. Salah, karena tidak terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $-3 \cdot k = 17$ (karena $17/-3 = -5\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$).

Latihan: Keterbagian

Latihan

Periksa kebenaran pernyataan-pernyataan berikut:

1. 6 membagi 54
2. -27 kelipatan dari 3
3. 3 membagi 91
4. 17 kelipatan dari -3
5. 4 membagi 0

Solusi:

1. Benar, karena terdapat $k = 9$ sehingga $6 \cdot 9 = 54$.
2. Benar, karena terdapat $k = -9$ sehingga $3 \cdot (-9) = -27$.
3. Salah, karena tidak terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $3 \cdot k = 91$ (karena $91/3 = 30\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$).
4. Salah, karena tidak terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $-3 \cdot k = 17$ (karena $17/-3 = -5\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$).
5. Benar, karena terdapat $k = 0$ sehingga $4 \cdot 0 = 0$.

Teorema Terkait Keterbagian

Teorema

Andaikan $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka

1. jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|\left(b+c\right)$
2. jika $a|b$, maka $a|bd$, untuk *setiap* $d \in \mathbb{Z}$
3. jika $a|b$ dan $b|c$, maka $a|c$

Bukti

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan, bukti untuk sifat nomor 3 telah dibahas pada kajian relasi transitif, karena keterbagian adalah sebuah relasi transitif.

Teorema

Apabila $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dengan sifat $a|b$ dan $a|c$, maka untuk *setiap* $m, n \in \mathbb{Z}$ berlaku $a|mb + nc$.

Bukti

Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan (petunjuk: gunakan sifat nomor 2 dan nomor 1 dari teorema sebelumnya).

Sifat-sifat Relasi Keterbagian

Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$ dan kita memiliki relasi R yang didefinisikan sebagai $aRb \Leftrightarrow a|b$, maka

1. Relasi $|$ bersifat refleksif karena $a|a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$
2. Relasi $|$ bersifat transitif karena bila $a|b$ dan $b|c$, maka $a|c$, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Menurut Anda apakah $|$ bersifat simetris? (Relasi R simetris bila berlaku: $\forall a \forall b \, (aRb \rightarrow bRa)$.)

Teorema Pembagian (*Division Theorem*)

Teorema (Teorema Pembagian (*Division Theorem*))

Apabila a adalah bilangan bulat dan d bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan-bilangan bulat unik q dan r dengan $0 \leq r < d$ yang memenuhi $a = dq + r$, selanjutnya:

- q disebut sebagai hasil bagi (*qutioent*) dari a oleh d, dan dinotasikan dengan $a \operatorname{div} d$,
- r disebut sebagai sisa pembagian (*remainder*) dari a oleh d, dan dinotasikan dengan $a \bmod d$.

Contoh

Perhatikan bahwa

1. jika $a = 17$ dan $d = 8$, maka $q =$

Teorema Pembagian (*Division Theorem*)

Teorema (Teorema Pembagian (*Division Theorem*))

Apabila a adalah bilangan bulat dan d bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan-bilangan bulat unik q dan r dengan $0 \leq r < d$ yang memenuhi $a = dq + r$, selanjutnya:

- q disebut sebagai hasil bagi (*qutioent*) dari a oleh d, dan dinotasikan dengan $a \operatorname{div} d$,
- r disebut sebagai sisa pembagian (*remainder*) dari a oleh d, dan dinotasikan dengan $a \bmod d$.

Contoh

Perhatikan bahwa

1. jika $a = 17$ dan $d = 8$, maka $q = 2$ dan $r =$

Teorema Pembagian (*Division Theorem*)

Teorema (Teorema Pembagian (*Division Theorem*))

Apabila a adalah bilangan bulat dan d bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan-bilangan bulat unik q dan r dengan $0 \leq r < d$ yang memenuhi $a = dq + r$, selanjutnya:

- q disebut sebagai hasil bagi (*qutioent*) dari a oleh d, dan dinotasikan dengan $a \operatorname{div} d$,
- r disebut sebagai sisa pembagian (*remainder*) dari a oleh d, dan dinotasikan dengan $a \bmod d$.

Contoh

Perhatikan bahwa

1. jika $a = 17$ dan $d = 8$, maka $q = 2$ dan $r = 1$, ini dikarenakan $17 = 8 \cdot 2 + 1$.
2. jika $a = 8$ dan $d = 17$, maka $q =$

Teorema Pembagian (*Division Theorem*)

Teorema (Teorema Pembagian (*Division Theorem*))

Apabila a adalah bilangan bulat dan d bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan-bilangan bulat unik q dan r dengan $0 \leq r < d$ yang memenuhi $a = dq + r$, selanjutnya:

- q disebut sebagai hasil bagi (*qutioent*) dari a oleh d, dan dinotasikan dengan $a \operatorname{div} d$,
- r disebut sebagai sisa pembagian (*remainder*) dari a oleh d, dan dinotasikan dengan $a \bmod d$.

Contoh

Perhatikan bahwa

1. jika $a = 17$ dan $d = 8$, maka $q = 2$ dan $r = 1$, ini dikarenakan $17 = 8 \cdot 2 + 1$.
2. jika $a = 8$ dan $d = 17$, maka $q = 0$ dan $r =$

Teorema Pembagian (*Division Theorem*)

Teorema (Teorema Pembagian (*Division Theorem*))

Apabila a adalah bilangan bulat dan d bilangan bulat positif, maka terdapat bilangan-bilangan bulat unik q dan r dengan $0 \leq r < d$ yang memenuhi $a = dq + r$, selanjutnya:

- q disebut sebagai hasil bagi (*qutioent*) dari a oleh d, dan dinotasikan dengan $a \operatorname{div} d$,
- r disebut sebagai sisa pembagian (*remainder*) dari a oleh d, dan dinotasikan dengan $a \bmod d$.

Contoh

Perhatikan bahwa

1. jika $a = 17$ dan $d = 8$, maka $q = 2$ dan $r = 1$, ini dikarenakan $17 = 8 \cdot 2 + 1$.
2. jika $a = 8$ dan $d = 17$, maka $q = 0$ dan $r = 8$, ini dikarenakan $8 = 17 \cdot 0 + 8$.

Catatan

Nilai sisa pembagian a terhadap d (remainder, atau $a \bmod d$) selalu non negatif.
Sebuah bahasa pemrograman dapat memiliki lebih dari satu operator aritmetika modular:

- mod dipakai pada Prolog, BASIC, Maple, Mathematica, EXCEL, dan SQL,
- $\%$ dipakai pada C, C++, Java, dan Python,
- rem dipakai pada Ada dan Lisp,

Beberapa operator aritmetika modular pada bahasa pemrograman tersebut dapat memberikan nilai negatif. Harap berhati-hati dalam menggunakannya.

Latihan

Latihan

Tentukan nilai dari

1. $11 \operatorname{div} 3$ dan $11 \bmod 3$
2. $-11 \operatorname{div} 3$ dan $-11 \bmod 3$

Solusi:

Latihan

Latihan

Tentukan nilai dari

1. $11 \operatorname{div} 3$ dan $11 \bmod 3$
2. $-11 \operatorname{div} 3$ dan $-11 \bmod 3$

Solusi:

1. $11 = 3\,(3) + 2$, akibatnya $11 \operatorname{div} 3 = 3$ dan $11 \bmod 3 = 2$

Latihan

Latihan

Tentukan nilai dari

1. $11 \operatorname{div} 3$ dan $11 \bmod 3$
2. $-11 \operatorname{div} 3$ dan $-11 \bmod 3$

Solusi:

1. $11 = 3\,(3) + 2$, akibatnya $11 \operatorname{div} 3 = 3$ dan $11 \bmod 3 = 2$
2. $-11 = 3\,(-4) + 1$, akibatnya $-11 \operatorname{div} 3 = -4$ dan $-11 \bmod 3 = 1$. Ingat bahwa meskipun $-11 = 3\,(-3) + (-2)$, tidak benar bahwa $-11 \bmod 3 = -2$, karena sisa pembagian harus non negatif.

Latihan

Latihan

Tentukan nilai dari

1. $22 \operatorname{div} 3$ dan $22 \bmod 3$
2. $-22 \operatorname{div} 3$ dan $-22 \bmod 3$
3. $97 \operatorname{div} 4$ dan $97 \bmod 4$
4. $-97 \operatorname{div} 4$ dan $-97 \bmod 4$

Solusi:

Latihan

Latihan

Tentukan nilai dari

1. $22 \operatorname{div} 3$ dan $22 \bmod 3$
2. $-22 \operatorname{div} 3$ dan $-22 \bmod 3$
3. $97 \operatorname{div} 4$ dan $97 \bmod 4$
4. $-97 \operatorname{div} 4$ dan $-97 \bmod 4$

Solusi:

1. $22 = 3\,(7) + 1$, akibatnya $22 \operatorname{div} 3 = 7$ dan $22 \bmod 3 = 1$.

Latihan

Latihan

Tentukan nilai dari

1. $22 \operatorname{div} 3$ dan $22 \bmod 3$
2. $-22 \operatorname{div} 3$ dan $-22 \bmod 3$
3. $97 \operatorname{div} 4$ dan $97 \bmod 4$
4. $-97 \operatorname{div} 4$ dan $-97 \bmod 4$

Solusi:

1. $22 = 3(7) + 1$, akibatnya $22 \operatorname{div} 3 = 7$ dan $22 \bmod 3 = 1$.
2. $-22 = 3(-8) + 2$, akibatnya $-22 \operatorname{div} 3 = -8$ dan $-22 \bmod 3 = 2$.

Latihan

Latihan

Tentukan nilai dari

1. $22 \operatorname{div} 3$ dan $22 \bmod 3$
2. $-22 \operatorname{div} 3$ dan $-22 \bmod 3$
3. $97 \operatorname{div} 4$ dan $97 \bmod 4$
4. $-97 \operatorname{div} 4$ dan $-97 \bmod 4$

Solusi:

1. $22 = 3\,(7) + 1$, akibatnya $22 \operatorname{div} 3 = 7$ dan $22 \bmod 3 = 1$.
2. $-22 = 3\,(-8) + 2$, akibatnya $-22 \operatorname{div} 3 = -8$ dan $-22 \bmod 3 = 2$.
3. $97 = 4\,(24) + 1$, akibatnya $97 \operatorname{div} 4 = 24$ dan $97 \bmod 4 = 1$.

Latihan

Latihan

Tentukan nilai dari

1. $22 \operatorname{div} 3$ dan $22 \bmod 3$
2. $-22 \operatorname{div} 3$ dan $-22 \bmod 3$
3. $97 \operatorname{div} 4$ dan $97 \bmod 4$
4. $-97 \operatorname{div} 4$ dan $-97 \bmod 4$

Solusi:

1. $22 = 3(7) + 1$, akibatnya $22 \operatorname{div} 3 = 7$ dan $22 \bmod 3 = 1$.
2. $-22 = 3(-8) + 2$, akibatnya $-22 \operatorname{div} 3 = -8$ dan $-22 \bmod 3 = 2$.
3. $97 = 4(24) + 1$, akibatnya $97 \operatorname{div} 4 = 24$ dan $97 \bmod 4 = 1$.
4. $-97 = 4(-25) + 3$, akibatnya $-97 \operatorname{div} 4 = -25$ dan $-97 \bmod 4 = 3$.

Teorema

Misalkan $a \in \mathbb{Z}$, a habis dibagi oleh $d \in \mathbb{Z}$ (atau dengan perkataan lain $d|a$) jika dan hanya jika $a \bmod d = 0$.

Bahasan

Bilangan Prima

Bilangan prima biasanya ditinjau pada semesta pembicaraan $\mathbb{Z}^+$.

Definisi

Suatu bilangan bulat positif $p > 1$ disebut prima apabila tepat memiliki dua pembagi positif, yaitu 1 dan p. Bilangan bulat positif yang lebih besar dari 1 dan *bukan prima* disebut komposit.

Dengan perkataan lain suatu bilangan bulat positif adalah bilangan prima jikka bilangan tersebut tidak habis dibagi bilangan bulat positif apapun kecuali 1 dan dirinya sendiri.

Algoritma Uji Primalitas (*Primality Testing*)

Permasalahan

Diberikan suatu bilangan bulat positif n, berikan sebuah algoritma untuk menentukan apakah n prima atau bukan.

Pendekatan 1: karena n prima jikka faktor dari n hanya 1 dan n saja, maka kita dapat membagi n dengan semua bilangan antara 2 sampai $n-1$. Bila nilai $n \bmod i$ untuk $i = 2, \ldots, n-1$ tak nol, maka n prima.

Algoritma Uji Primalitas (*Primality Testing*)

Permasalahan

Diberikan suatu bilangan bulat positif n, berikan sebuah algoritma untuk menentukan apakah n prima atau bukan.

Pendekatan 1: karena n prima jikka faktor dari n hanya 1 dan n saja, maka kita dapat membagi n dengan semua bilangan antara 2 sampai $n-1$. Bila nilai $n \bmod i$ untuk $i = 2, \ldots, n-1$ tak nol, maka n prima.

Algoritma Pertama

```
function IsPrime(n)                       // n ∈ ℤ⁺
    prime := True; i := 2
    if n = 1
        prime := False                    // 1 bukan bilangan prima
    while (prime = True) and (i < n)
        if n mod i = 0                    // n habis dibagi i
            prime := False
        else
            i := i + 1
    return(prime)
```

Faktor Prima Bilangan Komposit

Algoritma uji primalitas yang sebelumnya tidak efisien karena dalam **kasus terburuk** banyaknya iterasi yang diperlukan untuk memeriksa apakah n merupakan bilangan prima adalah $n-1$ iterasi. Untuk mempercepat algoritma uji primalitas, kita akan meninjau beberapa teorema terlebih dulu.

Teorema Dasar Aritmetika

Teorema (Teorema Dasar Aritmetika)

Setiap bilangan bulat positif dapat ditulis secara unik (tunggal) sebagai

1. sebuah bilangan prima, atau
2. perkalian dua atau lebih bilangan prima yang dituliskan dalam urutan yang tidak menurun.

Teorema di atas mengatakan bahwa setiap bilangan bulat positif pasti memiliki faktor prima.

Contoh

Faktorisasi prima dari 100, 641, 999, dan 1024 adalah

1. $100 =$

Teorema Dasar Aritmetika

Teorema (Teorema Dasar Aritmetika)

Setiap bilangan bulat positif dapat ditulis secara unik (tunggal) sebagai

1. sebuah bilangan prima, atau
2. perkalian dua atau lebih bilangan prima yang dituliskan dalam urutan yang tidak menurun.

Teorema di atas mengatakan bahwa setiap bilangan bulat positif pasti memiliki faktor prima.

Contoh

Faktorisasi prima dari 100, 641, 999, dan 1024 adalah

1. $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 5^2$,
2. $641 =$

Teorema Dasar Aritmetika

Teorema (Teorema Dasar Aritmetika)

Setiap bilangan bulat positif dapat ditulis secara unik (tunggal) sebagai

1. sebuah bilangan prima, atau
2. perkalian dua atau lebih bilangan prima yang dituliskan dalam urutan yang tidak menurun.

Teorema di atas mengatakan bahwa setiap bilangan bulat positif pasti memiliki faktor prima.

Contoh

Faktorisasi prima dari 100, 641, 999, dan 1024 adalah

1. $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 5^2$,
2. $641 = 641$,
3. $999 =$

Teorema Dasar Aritmetika

Teorema (Teorema Dasar Aritmetika)

Setiap bilangan bulat positif dapat ditulis secara unik (tunggal) sebagai

1. sebuah bilangan prima, atau
2. perkalian dua atau lebih bilangan prima yang dituliskan dalam urutan yang tidak menurun.

Teorema di atas mengatakan bahwa setiap bilangan bulat positif pasti memiliki faktor prima.

Contoh

Faktorisasi prima dari 100, 641, 999, dan 1024 adalah

1. $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 5^2$,
2. $641 = 641$,
3. $999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = 3^3 37$,
4. $1024 =$

Teorema Dasar Aritmetika

Teorema (Teorema Dasar Aritmetika)

Setiap bilangan bulat positif dapat ditulis secara unik (tunggal) sebagai

1. sebuah bilangan prima, atau
2. perkalian dua atau lebih bilangan prima yang dituliskan dalam urutan yang tidak menurun.

Teorema di atas mengatakan bahwa setiap bilangan bulat positif pasti memiliki faktor prima.

Contoh

Faktorisasi prima dari 100, 641, 999, dan 1024 adalah

1. $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 5^2$,
2. $641 = 641$,
3. $999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = 3^3 37$,
4. $1024 = 2^{10}$.

Faktor Prima Bilangan Komposit

Teorema

Misalkan n adalah suatu bilangan komposit, maka n memiliki faktor prima yang kurang dari atau sama dengan $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Bukti

Dijadikan salah satu *challenging problem*.

Akibatnya kita dapat memodifikasi algoritma sebelumnya menjadi lebih efisien sebagai berikut.

Algoritma Kedua

```
function IsPrime(n)                                   // n ∈ ℤ⁺
    prime := True; i := 2
    if n = 1
        prime := False                                // 1 bukan bilangan prima
    while (prime = True) and (i ≤ ⌊√n⌋)
        if n mod i = 0                                // n habis dibagi i
            prime := False
        else
            i := i + 1
    return(prime)
```

Akibatnya kita dapat memodifikasi algoritma sebelumnya menjadi lebih efisien sebagai berikut.

Algoritma Kedua

function $\texttt{IsPrime}(n)$ $\quad // \; n \in \mathbb{Z}^+$

  $prime := \texttt{True}$; $i := 2$

  if $n = 1$

    $prime := \texttt{False}$ $\quad //$ 1 bukan bilangan prima

  while $(prime = \texttt{True})$ **and** $(i \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$

    if $n \bmod i = 0$ $\quad //$ n habis dibagi i

      $prime := \texttt{False}$

    else

      $i := i + 1$

  return$(prime)$

Dalam kasus terburuk, algoritma uji primalitas di atas paling banyak memerlukan $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$ iterasi untuk memeriksa apakah n merupakan bilangan prima atau bukan.

Latihan

Periksa apakah bilangan-bilangan berikut prima atau komposit, jika komposit, tuliskan faktorisasi primanya.

1. 101
2. 7007

Solusi: perhatikan bahwa:

Latihan

Periksa apakah bilangan-bilangan berikut prima atau komposit, jika komposit, tuliskan faktorisasi primanya.

1. 101
2. 7007

Solusi: perhatikan bahwa:

1. Andaikan 101 komposit. Karena $\left\lfloor \sqrt{101} \right\rfloor = 10$, maka faktor-faktor prima yang mungkin untuk 101 adalah

Latihan

Periksa apakah bilangan-bilangan berikut prima atau komposit, jika komposit, tuliskan faktorisasi primanya.

1. 101
2. 7007

Solusi: perhatikan bahwa:

1. Andaikan 101 komposit. Karena $\left\lfloor\sqrt{101}\right\rfloor = 10$, maka faktor-faktor prima yang mungkin untuk 101 adalah $2, 3, 5, 7$.

Latihan

Periksa apakah bilangan-bilangan berikut prima atau komposit, jika komposit, tuliskan faktorisasi primanya.

1. 101
2. 7007

Solusi: perhatikan bahwa:

1. Andaikan 101 komposit. Karena $\lfloor\sqrt{101}\rfloor = 10$, maka faktor-faktor prima yang mungkin untuk 101 adalah $2, 3, 5, 7$. Akan tetapi, karena keempat bilangan tersebut tidak ada yang habis membagi 101, maka 101 pasti prima.

Latihan

Periksa apakah bilangan-bilangan berikut prima atau komposit, jika komposit, tuliskan faktorisasi primanya.

1. 101
2. 7007

Solusi: perhatikan bahwa:

1. Andaikan 101 komposit. Karena $\lfloor \sqrt{101} \rfloor = 10$, maka faktor-faktor prima yang mungkin untuk 101 adalah $2, 3, 5, 7$. Akan tetapi, karena keempat bilangan tersebut tidak ada yang habis membagi 101, maka 101 pasti prima.
2. Andaikan 7007 komposit. Karena $\lfloor \sqrt{7007} \rfloor = 83$, maka faktor-faktor prima yang mungkin untuk 7007 tidak lebih dari 83.

Latihan

Periksa apakah bilangan-bilangan berikut prima atau komposit, jika komposit, tuliskan faktorisasi primanya.

1. 101
2. 7007

Solusi: perhatikan bahwa:

1. Andaikan 101 komposit. Karena $\left\lfloor \sqrt{101} \right\rfloor = 10$, maka faktor-faktor prima yang mungkin untuk 101 adalah $2, 3, 5, 7$. Akan tetapi, karena keempat bilangan tersebut tidak ada yang habis membagi 101, maka 101 pasti prima.
2. Andaikan 7007 komposit. Karena $\left\lfloor \sqrt{7007} \right\rfloor = 83$, maka faktor-faktor prima yang mungkin untuk 7007 tidak lebih dari 83. Lebih lanjut, kita memiliki

$$\begin{aligned} 7007 &= 7 \cdot 1001 \\ 1001 &= 7 \cdot 143 \\ 143 &= 11 \cdot 13, \end{aligned}$$

akibatnya $7007 = 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.

Challenging Problem

Challenging Problem

Buatlah sebuah program dalam C, C++, Java, atau Python dengan *input* dan *output* berikut:

1. *input*: dua bilangan bulat positif a dan b yang berbeda (a dapat lebih besar dari b)
2. *output*: semua bilangan prima antara a dan b (inklusif, termasuk a dan b).

Contoh:

1. `input: 2, 13`
   `output: 2, 3, 5, 7, 11, 13`
2. `input: 101, 80`
   `output: 83, 89, 97, 101`

Bahasan

Which type are you?

Gambar diambil dari imgflip.com.

Representasi Bilangan Bulat

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia hampir selalu memakai sistem bilangan basis 10 dalam melakukan operasi aritmetika. Sebagai contoh 965 dapat ditulis sebagai $9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$. Dalam *computer science*, kita dihadapkan pada konversi sebuah bilangan dalam basis 10 ke basis lain, seperti biner (basis 2), oktal (basis 8), atau heksadesimal (basis 16).

Teorema

Misalkan $b > 1$ adalah sebuah bilangan bulat. Apabila n adalah bilangan bulat positif, maka n dapat dinyatakan secara **tunggal** dalam bentuk

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0,$$

dengan k berupa bilangan bulat tak negatif, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ bilangan bulat tak negatif yang kurang dari b, dan $a_k \neq 0$.

- Pada teorema sebelumnya, ekspansi dari n dalam basis b dinyatakan dengan $(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_b$. Sebagai contoh $(245)_8$ menyatakan bilangan $2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 5 = 165$ dalam basis 10.
- Secara umum, subskrip 10 pada ekspansi bilangan dalam basis 10 tidak ditulis karena basis 10 sudah umum digunakan sebagai representasi dari suatu bilangan bulat.
- Dalam bilangan heksadesimal, simbol-simbol yang digunakan adalah $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E}, \mathsf{F}$. Dalam hal ini, A s.d. F mewakili bilangan 10 s.d. 15 dalam basis 10.

Sistem bilangan heksadesimal dapat dijumpai pada *blue screen of death* pada sistem operasi Windows.

Latihan: Konversi ke Sistem Desimal

Latihan

Tentukan bilangan dalam basis 10 yang memiliki representasi biner, oktal, atau heksadesimal sebagai berikut:

1. $(1\ 0101\ 1111)_2$
2. $(7016)_8$
3. $(2\text{AE}0\text{B})_{16}$

Solusi: perhatikan bahwa:

1. $(1\ 0101\ 1111)_2 =$

Latihan: Konversi ke Sistem Desimal

Latihan

Tentukan bilangan dalam basis 10 yang memiliki representasi biner, oktal, atau heksadesimal sebagai berikut:

1. $(1\ 0101\ 1111)_2$
2. $(7016)_8$
3. $(\mathsf{2AE0B})_{16}$

Solusi: perhatikan bahwa:

1. $(1\ 0101\ 1111)_2 =$ $1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \mathbf{351}$.
2. $(7016)_8 =$

Latihan: Konversi ke Sistem Desimal

Latihan

Tentukan bilangan dalam basis 10 yang memiliki representasi biner, oktal, atau heksadesimal sebagai berikut:

1. $(1\ 0101\ 1111)_2$
2. $(7016)_8$
3. $(2\text{AE}0\text{B})_{16}$

Solusi: perhatikan bahwa:

1. $(1\ 0101\ 1111)_2 =$
   $1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \mathbf{351}$.
2. $(7016)_8 = 7 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = \mathbf{3598}$.
3. $(2\text{AE}0\text{B})_{16} =$

Latihan: Konversi ke Sistem Desimal

Latihan

Tentukan bilangan dalam basis 10 yang memiliki representasi biner, oktal, atau heksadesimal sebagai berikut:

1. $(1\ 0101\ 1111)_2$
2. $(7016)_8$
3. $(\mathsf{2AE0B})_{16}$

Solusi: perhatikan bahwa:

1. $(1\ 0101\ 1111)_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \mathbf{351}$.
2. $(7016)_8 = 7 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = \mathbf{3598}$.
3. $(\mathsf{2AE0B})_{16} = 2 \cdot 16^4 + 10 \cdot 16^3 + 14 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = \mathbf{175627}$.

Konversi dari Sistem Desimal

Diberikan suatu bilangan bulat n yang akan dikonversi ke suatu bilangan dalam basis b, maka langkah-langkah konversi yang dilakukan dapat dijelaskan sebagai berikut:

1. nyatakan n sebagai $n = bq_0 + a_0$ dengan $0 \leq a_0 < b$, a_0 adalah digit paling kanan pada ekspansi n dalam basis b;
2. nyatakan q_0 sebagai $q_0 = bq_1 + a_1$ dengan $0 \leq a_1 < b$, a_1 adalah digit ke dua dari kanan pada ekspansi n dalam basis b;
3. lakukan proses berikut secara terus menerus hingga $q_r = 0$ untuk suatu $r \geq 0$: nyatakan q_{r-1} sebagai $q_{r-1} = bq_r + a_r$ dengan $0 \leq a_r < b$, a_r adalah digit ke $r + 1$ dari kanan dalam ekspansi n pada basis b;
4. hasil dari proses ini adalah ekspansi dari n dalam basis b dengan a_r adalah digit paling kiri dan a_0 adalah digit paling kanan.

Contoh

Representasi oktal (basis 8) dari 12345 dapat diperoleh dengan langkah berikut

$$12345 \quad =$$

Contoh

Representasi oktal (basis 8) dari 12345 dapat diperoleh dengan langkah berikut

$$\begin{aligned} 12345 &= 8 \cdot 1543 + 1 \\ 1543 &= \end{aligned}$$

Contoh

Representasi oktal (basis 8) dari 12345 dapat diperoleh dengan langkah berikut

$$
\begin{aligned}
12345 &= 8 \cdot 1543 + 1 \\
1543 &= 8 \cdot 192 + 7 \\
192 &=
\end{aligned}
$$

Contoh

Representasi oktal (basis 8) dari 12345 dapat diperoleh dengan langkah berikut

$$\begin{aligned} 12345 &= 8 \cdot 1543 + {\color{blue}1} \\ 1543 &= 8 \cdot 192 + {\color{blue}7} \\ 192 &= 8 \cdot 24 + {\color{blue}0} \\ 24 &= \end{aligned}$$

Contoh

Representasi oktal (basis 8) dari 12345 dapat diperoleh dengan langkah berikut

$$\begin{aligned} 12345 &= 8 \cdot 1543 + 1 \\ 1543 &= 8 \cdot 192 + 7 \\ 192 &= 8 \cdot 24 + 0 \\ 24 &= 8 \cdot 3 + 0 \\ 3 &= \end{aligned}$$

Contoh

Representasi oktal (basis 8) dari 12345 dapat diperoleh dengan langkah berikut

$$\begin{aligned} 12345 &= 8 \cdot 1543 + 1 \\ 1543 &= 8 \cdot 192 + 7 \\ 192 &= 8 \cdot 24 + 0 \\ 24 &= 8 \cdot 3 + 0 \\ 3 &= 8 \cdot 0 + 3. \end{aligned}$$

Akibatnya 12345 dalam basis 8 adalah $(30071)_8$.

Representasi heksadesimal (basis 16) dari 117130 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$177130 \quad =$$

Representasi heksadesimal (basis 16) dari 117130 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned} 177130 &= 16 \cdot 11070 + {\color{blue}10} \\ 11070 &= \end{aligned}$$

Representasi heksadesimal (basis 16) dari 117130 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned} 177130 &= 16 \cdot 11070 + {\color{blue}10} \\ 11070 &= 16 \cdot 691 + {\color{blue}14} \\ 691 &= \end{aligned}$$

Representasi heksadesimal (basis 16) dari 117130 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned}
177130 &= 16 \cdot 11070 + 10 \\
11070 &= 16 \cdot 691 + 14 \\
691 &= 16 \cdot 43 + 3 \\
43 &=
\end{aligned}$$

Representasi heksadesimal (basis 16) dari 117130 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$
\begin{aligned}
177130 &= 16 \cdot 11070 + 10 \\
11070 &= 16 \cdot 691 + 14 \\
691 &= 16 \cdot 43 + 3 \\
43 &= 16 \cdot 2 + 11 \\
2 &=
\end{aligned}
$$

Representasi heksadesimal (basis 16) dari 117130 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned} 177130 &= 16 \cdot 11070 + 10 \\ 11070 &= 16 \cdot 691 + 14 \\ 691 &= 16 \cdot 43 + 3 \\ 43 &= 16 \cdot 2 + 11 \\ 2 &= 16 \cdot 0 + 2. \end{aligned}$$

Akibatnya 117130 dalam basis 16 adalah $(2\text{B3EA})_{16}$

Representasi biner dari 241 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$241 =$$

Representasi biner dari 241 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned} 241 &= 2 \cdot 120 + 1 \\ 120 &= \end{aligned}$$

Representasi biner dari 241 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned} 241 &= 2 \cdot 120 + 1 \\ 120 &= 2 \cdot 60 + 0 \\ 60 &= \end{aligned}$$

Representasi biner dari 241 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned} 241 &= 2 \cdot 120 + 1 \\ 120 &= 2 \cdot 60 + 0 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \\ 30 &= \end{aligned}$$

Representasi biner dari 241 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned} 241 &= 2 \cdot 120 + 1 \\ 120 &= 2 \cdot 60 + 0 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \\ 30 &= 2 \cdot 15 + 0 \\ 15 &= \end{aligned}$$

Representasi biner dari 241 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned} 241 &= 2 \cdot 120 + 1 \\ 120 &= 2 \cdot 60 + 0 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \\ 30 &= 2 \cdot 15 + 0 \\ 15 &= 2 \cdot 7 + 1 \\ 7 &= \end{aligned}$$

Representasi biner dari 241 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned}
241 &= 2 \cdot 120 + 1 \\
120 &= 2 \cdot 60 + 0 \\
60 &= 2 \cdot 30 + 0 \\
30 &= 2 \cdot 15 + 0 \\
15 &= 2 \cdot 7 + 1 \\
7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\
3 &=
\end{aligned}$$

Representasi biner dari 241 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned}
241 &= 2 \cdot 120 + 1 \\
120 &= 2 \cdot 60 + 0 \\
60 &= 2 \cdot 30 + 0 \\
30 &= 2 \cdot 15 + 0 \\
15 &= 2 \cdot 7 + 1 \\
7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
1 &=
\end{aligned}$$

Representasi biner dari 241 dapat diperoleh dengan langkah berikut:

$$\begin{aligned} 241 &= 2 \cdot 120 + 1 \\ 120 &= 2 \cdot 60 + 0 \\ 60 &= 2 \cdot 30 + 0 \\ 30 &= 2 \cdot 15 + 0 \\ 15 &= 2 \cdot 7 + 1 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ 1 &= 2 \cdot 0 + 1. \end{aligned}$$

Akibatnya 241 dalam basis biner adalah $(1111\ 0001)_2$.

Algoritma Konversi dari Desimal

Algoritma konversi suatu bilangan bulat $n > 0$ ke basis b dapat dituliskan sebagai berikut.

Konstruksi Ekspansi Basis b

procedure `Convert`(n, b) // konversi n ke dalam basis b

  $q := n$

  $k := 0$

  while $q \neq 0$

    $a_k := q \bmod b$

    $q := q \operatorname{div} b$

    $k := k + 1$

  return $(a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0)$ // $(a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0)_b$ adalah representasi // n dalam basis b)

Tabel Konversi (0 – 15)

desimal	0	1	2	3	4	5	6	7
biner	0	1	10	11	100	101	110	111
oktal	0	1	2	3	4	5	6	7
heksadesimal	0	1	2	3	4	5	6	7

desimal	8	9	10	11	12	13	14	15
biner	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
oktal	10	11	12	13	14	15	16	17
heksadesimal	8	9	A	B	C	D	E	F