Pengantar Metode Pembuktian Matematis Bagian 2: Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi, Pernyataan yang Ekuivalen, dan Contoh Penyangkal

Kuliah Logika Matematika Semester Ganjil 2022-2023

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

Desember 2022

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications* (Bab 1), Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications* (Bab 4), Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 1 (2010) di Fasilkom UI oleh A. A. Krisndahi.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

Bahasan

1. Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
2. Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
3. (Contoh) Penyangkal Pernyataan
4. Strategi Pembuktian Sederhana
5. Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Bahasan

1. Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
2. Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
3. (Contoh) Penyangkal Pernyataan
4. Strategi Pembuktian Sederhana
5. Beberapa Kesalahan dalam "Bukti" Matematis

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bagaimana cara membuktikan teorema di atas?

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bagaimana cara membuktikan teorema di atas? Pernyataan di atas tidak dapat dibuktikan dengan bukti langsung maupun bukti tak langsung dengan dengan kontraposisi.

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

1. pertama asumsikan $\neg p$ **benar**

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

1. pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
2. konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga. . .

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

1. pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
2. konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga. . .
3. diperoleh pernyataan r dan pernyataan $\neg r$

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

1. pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
2. konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga. . .
3. diperoleh pernyataan r dan pernyataan $\neg r$
4. akibatnya, dengan aturan inferensi konjungsi, diperoleh $r \wedge \neg r$ yang merupakan kontradiksi

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

1. pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
2. konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga...
3. diperoleh pernyataan r dan pernyataan $\neg r$
4. akibatnya, dengan aturan inferensi konjungsi, diperoleh $r \wedge \neg r$ yang merupakan kontradiksi
5. dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ **benar**

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

1. pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
2. konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga. . .
3. diperoleh pernyataan r dan pernyataan $\neg r$
4. akibatnya, dengan aturan inferensi konjungsi, diperoleh $r \wedge \neg r$ yang merupakan kontradiksi
5. dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ **benar**
6. karena $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ **benar**, dan $(r \wedge \neg r)$ selalu **salah**, maka haruslah

Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)

Andaikan terdapat suatu pernyataan (teorema) p yang ingin dibuktikan kebenarannya. Bukti tak langsung dengan kontradiksi untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan p dibangun dengan cara berikut:

1. pertama asumsikan $\neg p$ **benar**
2. konstruksi pernyataan-pernyataan berikutnya dengan aturan inferensi hingga...
3. diperoleh pernyataan r dan pernyataan $\neg r$
4. akibatnya, dengan aturan inferensi konjungsi, diperoleh $r \wedge \neg r$ yang merupakan kontradiksi
5. dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ **benar**
6. karena $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ **benar**, dan $(r \wedge \neg r)$ selalu **salah**, maka haruslah $\neg p$ **salah**; karena $\neg p$ **salah**, haruslah p **benar**.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

1. Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

1. Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M.
2. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

1. Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M.
2. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.
3. Pandang bilangan $N = M + 1$,

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

1. Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M.
2. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.
3. Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

1. Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M.
2. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.
3. Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
4. Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). $\square$

Bukti

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

1. Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M.
2. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.
3. Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
4. Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). $\square$

Bukti

Andaikan terdapat bilangan bulat M yang merupakan bilangan bulat terbesar.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

1. Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M.
2. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.
3. Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
4. Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). □

Bukti

Andaikan terdapat bilangan bulat M yang merupakan bilangan bulat terbesar. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

1. Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M.
2. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.
3. Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
4. Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). $\square$

Bukti

Andaikan terdapat bilangan bulat M yang merupakan bilangan bulat terbesar. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n. Pandang bilangan $N = M + 1$,

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

1. Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M.
2. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.
3. Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
4. Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). $\square$

Bukti

Andaikan terdapat bilangan bulat M yang merupakan bilangan bulat terbesar. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n. Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat dan $N > M$.

Contoh Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi

Teorema

Tidak ada bilangan bulat terbesar.

Bukti (Sketsa)

1. Andaikan ada bilangan bulat terbesar, katakanlah bilangan itu M.
2. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.
3. Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat (karena bilangan bulat ditambah 1 hasilnya tetap bilangan bulat) dan $N > M$.
4. Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar (nomor 1). $\square$

Bukti

Andaikan terdapat bilangan bulat M yang merupakan bilangan bulat terbesar. Karena M bilangan bulat terbesar, maka $M \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n. Pandang bilangan $N = M + 1$, N juga merupakan bilangan bulat dan $N > M$. Hal ini bertentangan dengan pengandaian bahwa M adalah bilangan bulat terbesar. Akibatnya tidak terdapat bilangan bulat terbesar. $\square$

Latihan 4

Teorema (Teorema 4.1)

Di antara 37 orang yang berada di sebuah ruangan, setidaknya ada 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama.

Teorema (Teorema 4.2)

Tidak ada bilangan bulat yang genap dan ganjil sekaligus.

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Pehatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun.

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Pehatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu,

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Pehatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut.

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Pehatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Pehatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat $3 \cdot 12 = 36$ orang yang berada di ruangan itu, yang bertentangan dengan fakta bahwa terdapat 37 orang di ruangan tersebut. Akibatnya, di antara 37 orang yang berada di sebuah ruangan, setidaknya ada 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 4.2)

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Pehatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat $3 \cdot 12 = 36$ orang yang berada di ruangan itu, yang bertentangan dengan fakta bahwa terdapat 37 orang di ruangan tersebut. Akibatnya, di antara 37 orang yang berada di sebuah ruangan, setidaknya ada 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 4.2)

Andaikan ada bilangan bulat m yang genap dan ganjil sekaligus,

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Pehatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat $3 \cdot 12 = 36$ orang yang berada di ruangan itu, yang bertentangan dengan fakta bahwa terdapat 37 orang di ruangan tersebut. Akibatnya, di antara 37 orang yang berada di sebuah ruangan, setidaknya ada 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 4.2)

Andaikan ada bilangan bulat m yang genap dan ganjil sekaligus, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $m = 2k = 2\ell + 1$.

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Pehatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat $3 \cdot 12 = 36$ orang yang berada di ruangan itu, yang bertentangan dengan fakta bahwa terdapat 37 orang di ruangan tersebut. Akibatnya, di antara 37 orang yang berada di sebuah ruangan, setidaknya ada 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 4.2)

Andaikan ada bilangan bulat m yang genap dan ganjil sekaligus, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $m = 2k = 2\ell + 1$. Akibatnya diperoleh $2(k - \ell) = 1$, atau $k - \ell = \frac{1}{2}$.

Bukti (Bukti Teorema 4.1)

Pehatikan bahwa terdapat 12 bulan yang berbeda dalam setahun. Andaikan tidak terdapat 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di ruangan itu, maka paling banyak terdapat 3 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama di antara 37 orang tersebut. Hal ini mengakibatkan paling banyak terdapat $3 \cdot 12 = 36$ orang yang berada di ruangan itu, yang bertentangan dengan fakta bahwa terdapat 37 orang di ruangan tersebut. Akibatnya, di antara 37 orang yang berada di sebuah ruangan, setidaknya ada 4 orang yang berulang tahun pada bulan yang sama. $\square$

Bukti (Bukti Teorema 4.2)

Andaikan ada bilangan bulat m yang genap dan ganjil sekaligus, maka terdapat bilangan bulat k dan ℓ yang memenuhi $m = 2k = 2\ell + 1$. Akibatnya diperoleh $2(k - \ell) = 1$, atau $k - \ell = \frac{1}{2}$. Hal ini tidak mungkin terjadi karena selisih dari dua bilangan bulat harus berupa bilangan bulat. Jadi tidak ada bilangan bulat yang genap dan ganjil sekaligus. $\square$

Latihan 5

Teorema (Teorema 5)

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Bukti (Bukti Teorema 5)

Latihan 5

Teorema (Teorema 5)

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Bukti (Bukti Teorema 5)

Andaikan terdapat bilangan ganjil terkecil, misalkan bilangan tersebut adalah M.

Latihan 5

Teorema (Teorema 5)

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Bukti (Bukti Teorema 5)

Andaikan terdapat bilangan ganjil terkecil, misalkan bilangan tersebut adalah M. Maka $M = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k dan $M \leq n$ untuk setiap bilangan ganjil n.

Latihan 5

Teorema (Teorema 5)

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Bukti (Bukti Teorema 5)

Andaikan terdapat bilangan ganjil terkecil, misalkan bilangan tersebut adalah M. Maka $M = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k dan $M \leq n$ untuk setiap bilangan ganjil n. Pandang bilangan bulat $N =$

Latihan 5

Teorema (Teorema 5)

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Bukti (Bukti Teorema 5)

Andaikan terdapat bilangan ganjil terkecil, misalkan bilangan tersebut adalah M. Maka $M = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k dan $M \leq n$ untuk setiap bilangan ganjil n. Pandang bilangan bulat $N = M - 2 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$, N juga merupakan bilangan ganjil dan $N < M$.

Latihan 5

Teorema (Teorema 5)

Tidak terdapat bilangan ganjil terkecil.

Bukti (Bukti Teorema 5)

Andaikan terdapat bilangan ganjil terkecil, misalkan bilangan tersebut adalah M. Maka $M = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k dan $M \leq n$ untuk setiap bilangan ganjil n. Pandang bilangan bulat $N = M - 2 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$, N juga merupakan bilangan ganjil dan $N < M$. Ini berarti N adalah bilangan ganjil yang lebih kecil dari M, dan hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa M adalah bilangan ganjil terkecil. $\square$

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b, dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b.

Catatan

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b, dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b.

Catatan

Anda mengenal istilah $\gcd$ sebagai FPB di sekolah dasar dan menengah. $\gcd$ merupakan singkatan dari *greatest common divisor* yang artinya pembagi bersama terbesar.

Sebagai contoh, kita memiliki $\gcd(8, 4) =$

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b, dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b.

Catatan

Anda mengenal istilah $\gcd$ sebagai FPB di sekolah dasar dan menengah. $\gcd$ merupakan singkatan dari *greatest common divisor* yang artinya pembagi bersama terbesar.

Sebagai contoh, kita memiliki $\gcd(8, 4) = 4$, $\gcd(12, 9) =$

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b, dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b.

Catatan

Anda mengenal istilah $\gcd$ sebagai FPB di sekolah dasar dan menengah. $\gcd$ merupakan singkatan dari *greatest common divisor* yang artinya pembagi bersama terbesar.

Sebagai contoh, kita memiliki $\gcd(8, 4) = 4$, $\gcd(12, 9) = 3$, $\gcd(-3, -6) =$

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b, dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b.

Catatan

Anda mengenal istilah $\gcd$ sebagai FPB di sekolah dasar dan menengah. $\gcd$ merupakan singkatan dari *greatest common divisor* yang artinya pembagi bersama terbesar.

Sebagai contoh, kita memiliki $\gcd(8, 4) = 4$, $\gcd(12, 9) = 3$, $\gcd(-3, -6) = 3$, dan $\gcd(3, 0) =$

$\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Teorema

$\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Teorema di atas berarti $\sqrt{2}$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya adalah bilangan bulat dan $b \neq 0$.
Untuk membuktikan teorema di atas, terlebih dulu tinjau definisi dan dua lema berikut.

Definisi

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tak keduanya nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b, dinotasikan dengan $\gcd(a, b)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang habis membagi a dan b.

Catatan

Anda mengenal istilah $\gcd$ sebagai FPB di sekolah dasar dan menengah. $\gcd$ merupakan singkatan dari *greatest common divisor* yang artinya pembagi bersama terbesar.

Sebagai contoh, kita memiliki $\gcd(8, 4) = 4$, $\gcd(12, 9) = 3$, $\gcd(-3, -6) = 3$, dan $\gcd(3, 0) = 3$.

Lema (Lema 6)

Apabila r adalah bilangan rasional, maka r dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan $\gcd(a, b) = 1$.

Sebagai contoh, $\frac{8}{18}$ dapat dinyatakan sebagai

Lema (Lema 6)

Apabila r adalah bilangan rasional, maka r dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan $\gcd(a,b)=1$.

Sebagai contoh, $\frac{8}{18}$ dapat dinyatakan sebagai $\frac{4}{9}$, tinjau bahwa $\gcd(4,9)=1$. Bentuk bilangan rasional $\frac{a}{b}$ dengan $\gcd(a,b)=1$ selanjutnya dikatakan sebagai bentuk sederhana dari bilangan rasional tersebut.

Lema (Lema 7)

Misalkan n adalah bilangan bulat, jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti

Latihan.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional,

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c. Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c. Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Perhatikan bahwa b^2 adalah bilangan genap.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c. Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Perhatikan bahwa b^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, b juga harus bilangan genap, jadi $b = 2d$, untuk suatu bilangan bulat d.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c. Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Perhatikan bahwa b^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, b juga harus bilangan genap, jadi $b = 2d$, untuk suatu bilangan bulat d. Tinjau bahwa $\gcd(a, b) = \gcd(2c, 2d) \geq 2$,

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c. Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Perhatikan bahwa b^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, b juga harus bilangan genap, jadi $b = 2d$, untuk suatu bilangan bulat d. Tinjau bahwa $\gcd(a, b) = \gcd(2c, 2d) \geq 2$, hal ini bertentangan dengan asumsi sebelumnya bahwa $\gcd(a, b) = 1$.

Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional

Bukti (Bukti $\sqrt{2}$ adalah Bilangan Irasional)

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irasional, maka $\sqrt{2}$ bilangan rasional. Akibatnya (berdasarkan Lema 6) terdapat bilangan bulat a dan b dengan $b \neq 0$ dan $\gcd(a, b) = 1$ yang memenuhi $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dengan mengkuadratkan kedua ruas, diperoleh $\frac{a^2}{b^2} = 2$, sehingga $a^2 = 2b^2$.

Perhatikan bahwa a^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, a juga harus bilangan genap, jadi $a = 2c$, untuk suatu bilangan bulat c. Dengan mensubstitusikan hasil ini ke fakta sebelumnya, diperoleh $(2c)^2 = 2b^2$, atau $4c^2 = 2b^2$, sehingga $b^2 = 2c^2$.

Perhatikan bahwa b^2 adalah bilangan genap. Berdasarkan Lema 7, b juga harus bilangan genap, jadi $b = 2d$, untuk suatu bilangan bulat d. Tinjau bahwa $\gcd(a, b) = \gcd(2c, 2d) \geq 2$, hal ini bertentangan dengan asumsi sebelumnya bahwa $\gcd(a, b) = 1$. Dengan demikian haruslah $\sqrt{2}$ bilangan irasional. $\square$

Challenging Problems

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut. Misalkan ${}^{a}\log_{b}$ menyatakan bilangan real sehingga $a^{{}^{a}\log b} = b$ (contoh: ${}^{2}\log 8 = 3$, ${}^{3}\log 9 = 2$).

1. ${}^{2}\log 3$ irasional.
2. $\sqrt[3]{2}$ irasional.
3. Jika a adalah bilangan genap dan b adalah bilangan ganjil, maka ${}^{a}\log b$ bukan bilangan rasional.

Bahasan

1. Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
2. Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
3. (Contoh) Penyangkal Pernyataan
4. Strategi Pembuktian Sederhana
5. Beberapa Kesalahan dalam "Bukti" Matematis

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "p jika dan hanya jika q", atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \to q) \wedge (q \to p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \to q$ berlaku **dan** $q \to p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "p jika dan hanya jika q", atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku **dan** $q \rightarrow p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

$(\Rightarrow)$ Pertama akan dibuktikan bahwa jika n ganjil, maka $5n + 6$ ganjil.

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "p jika dan hanya jika q", atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \to q) \land (q \to p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \to q$ berlaku **dan** $q \to p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

$(\Rightarrow)$ Pertama akan dibuktikan bahwa jika n ganjil, maka $5n + 6$ ganjil. Andaikan n ganjil, maka $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k. Kita memperoleh $5n + 6 = 5(2k + 1) + 6 = 2(5k + 5) + 1$. Jadi $5n + 6$ ganjil.

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "p jika dan hanya jika q", atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku **dan** $q \rightarrow p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

($\Rightarrow$) Pertama akan dibuktikan bahwa jika n ganjil, maka $5n + 6$ ganjil. Andaikan n ganjil, maka $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k. Kita memperoleh $5n + 6 = 5\,(2k + 1) + 6 = 2\,(5k + 5) + 1$. Jadi $5n + 6$ ganjil.
($\Leftarrow$) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $5n + 6$ ganjil, maka n ganjil.

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "p jika dan hanya jika q", atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku **dan** $q \rightarrow p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

$(\Rightarrow)$ Pertama akan dibuktikan bahwa jika n ganjil, maka $5n + 6$ ganjil. Andaikan n ganjil, maka $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k. Kita memperoleh $5n + 6 = 5(2k + 1) + 6 = 2(5k + 5) + 1$. Jadi $5n + 6$ ganjil.
$(\Leftarrow)$ Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $5n + 6$ ganjil, maka n ganjil. Pernyataan ini setara dengan kontraposisinya, yaitu jika n genap, maka $5n + 6$ genap.

Membuktikan Ekuivalensi Dua Pernyataan

- Misalkan terdapat suatu pernyataan (teorema) yang berbentuk: "p jika dan hanya jika q", atau ditulis $p \leftrightarrow q$.
- Perhatikan bahwa $p \leftrightarrow q$ setara dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, jadi untuk membuktikan bahwa $p \leftrightarrow q$ berlaku, kita dapat melakukannya dengan membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ berlaku **dan** $q \rightarrow p$ berlaku.

Teorema

Apabila n adalah bilangan bulat, maka n ganjil jika dan hanya jika $5n + 6$ ganjil.

Bukti

$(\Rightarrow)$ Pertama akan dibuktikan bahwa jika n ganjil, maka $5n + 6$ ganjil. Andaikan n ganjil, maka $n = 2k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k. Kita memperoleh $5n + 6 = 5(2k + 1) + 6 = 2(5k + 5) + 1$. Jadi $5n + 6$ ganjil.
$(\Leftarrow)$ Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $5n + 6$ ganjil, maka n ganjil. Pernyataan ini setara dengan kontraposisinya, yaitu jika n genap, maka $5n + 6$ genap. Andaikan n genap, maka $n = 2\ell$, untuk suatu bilangan bulat ℓ. Kita memperoleh $5n + 6 = 5(2\ell) + 6 = 2(5\ell + 3)$. Jadi $5n + 6$ genap. $\square$

Latihan 6

Latihan

Buktikan atau sangkal pernyataan-pernyataan berikut. Misalkan n adalah bilangan bulat.

1. n ganjil jika dan hanya jika $7n + 4$ ganjil,
2. $n + 5$ ganjil jika dan hanya jika $3n + 2$ ganjil.

Bahasan

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. Jika x adalah bilangan tak nol real, maka $x^2 \geq 1$.
2. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. Jika x adalah bilangan tak nol real, maka $x^2 \geq 1$.
2. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

1. Pernyataan salah, pilih $x =$

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. Jika x adalah bilangan tak nol real, maka $x^2 \geq 1$.
2. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

1. Pernyataan salah, pilih $x = \frac{1}{2}$, maka $x^2 = \frac{1}{4} \not\geq 1$.

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. Jika x adalah bilangan tak nol real, maka $x^2 \geq 1$.
2. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

1. Pernyataan salah, pilih $x = \frac{1}{2}$, maka $x^2 = \frac{1}{4} \ngeq 1$.
2. Pernyataan salah, pilih $x =$

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. Jika x adalah bilangan tak nol real, maka $x^2 \geq 1$.
2. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

1. Pernyataan salah, pilih $x = \frac{1}{2}$, maka $x^2 = \frac{1}{4} \ngeq 1$.
2. Pernyataan salah, pilih $x = 1$, $y =$

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. Jika x adalah bilangan tak nol real, maka $x^2 \geq 1$.
2. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

1. Pernyataan salah, pilih $x = \frac{1}{2}$, maka $x^2 = \frac{1}{4} \not\geq 1$.
2. Pernyataan salah, pilih $x = 1$, $y = 0$, dan $z =$

(Contoh) Penyangkal Sebuah Pernyataan

Ingat kembali bahwa untuk menunjukkan kalimat yang berbentuk $\forall x P(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah contoh penyangkal, yakni, sebuah elemen c pada semesta pembicaraan yang mengakibatkan $P(c)$ salah.

Latihan

Periksa kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut.

1. Jika x adalah bilangan tak nol real, maka $x^2 \geq 1$.
2. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan bulat. Apabila $xy = 0$ dan $yz = 0$, maka $xz = 0$.

Solusi:

1. Pernyataan salah, pilih $x = \frac{1}{2}$, maka $x^2 = \frac{1}{4} \not\geq 1$.
2. Pernyataan salah, pilih $x = 1$, $y = 0$, dan $z = 2$, maka $xy = 0$, $yz = 0$, tetapi $xz = 2$.

Bahasan

Strategi Pembuktian

"*Begin at the beginning... and go on till you come to the end: then stop.*"
-Lewis Carrol, *Alice's Adventures in Wonderland*, 1865

Ketika dihadapkan pada suatu pernyataan yang ingin dibuktikan/ diperiksa kebenarannya:

1. terjemahkan setiap istilah pada pernyataan tersebut sesuai dengan definisinya,

Strategi Pembuktian

"*Begin at the beginning... and go on till you come to the end: then stop.*"
-Lewis Carrol, *Alice's Adventures in Wonderland*, 1865

Ketika dihadapkan pada suatu pernyataan yang ingin dibuktikan/ diperiksa kebenarannya:

1. terjemahkan setiap istilah pada pernyataan tersebut sesuai dengan definisinya,
2. analisis arti dari hipotesis dan kesimpulan yang ada pada pernyataan tersebut,

Strategi Pembuktian

"Begin at the beginning... and go on till you come to the end: then stop."
-Lewis Carrol, *Alice's Adventures in Wonderland*, 1865

Ketika dihadapkan pada suatu pernyataan yang ingin dibuktikan/ diperiksa kebenarannya:

1. terjemahkan setiap istilah pada pernyataan tersebut sesuai dengan definisinya,
2. analisis arti dari hipotesis dan kesimpulan yang ada pada pernyataan tersebut,
3. lihat korelasi yang ada antara hipotesis dan kesimpulannya,

Strategi Pembuktian

"*Begin at the beginning... and go on till you come to the end: then stop.*"
-Lewis Carrol, *Alice's Adventures in Wonderland*, 1865

Ketika dihadapkan pada suatu pernyataan yang ingin dibuktikan/ diperiksa kebenarannya:

1. terjemahkan setiap istilah pada pernyataan tersebut sesuai dengan definisinya,
2. analisis arti dari hipotesis dan kesimpulan yang ada pada pernyataan tersebut,
3. lihat korelasi yang ada antara hipotesis dan kesimpulannya,
4. coba membuktikan dengan memakai salah satu metode pembuktian, untuk pernyataan yang berupa implikasi $(p \to q)$:

Strategi Pembuktian

"*Begin at the beginning... and go on till you come to the end: then stop.*"
-Lewis Carrol, *Alice's Adventures in Wonderland*, 1865

Ketika dihadapkan pada suatu pernyataan yang ingin dibuktikan/ diperiksa kebenarannya:

1. terjemahkan setiap istilah pada pernyataan tersebut sesuai dengan definisinya,
2. analisis arti dari hipotesis dan kesimpulan yang ada pada pernyataan tersebut,
3. lihat korelasi yang ada antara hipotesis dan kesimpulannya,
4. coba membuktikan dengan memakai salah satu metode pembuktian, untuk pernyataan yang berupa implikasi $(p \rightarrow q)$:
    1. coba buktikan dengan bukti langsung; jika gagal

Strategi Pembuktian

"*Begin at the beginning... and go on till you come to the end: then stop.*"
-Lewis Carrol, *Alice's Adventures in Wonderland*, 1865

Ketika dihadapkan pada suatu pernyataan yang ingin dibuktikan/ diperiksa kebenarannya:

1. terjemahkan setiap istilah pada pernyataan tersebut sesuai dengan definisinya,
2. analisis arti dari hipotesis dan kesimpulan yang ada pada pernyataan tersebut,
3. lihat korelasi yang ada antara hipotesis dan kesimpulannya,
4. coba membuktikan dengan memakai salah satu metode pembuktian, untuk pernyataan yang berupa implikasi $(p \rightarrow q)$:
    1. coba buktikan dengan bukti langsung; jika gagal
    2. coba bukti tak langsung dengan kontraposisi; jika gagal

Strategi Pembuktian

"Begin at the beginning... and go on till you come to the end: then stop."
-Lewis Carrol, *Alice's Adventures in Wonderland*, 1865

Ketika dihadapkan pada suatu pernyataan yang ingin dibuktikan/ diperiksa kebenarannya:

1. terjemahkan setiap istilah pada pernyataan tersebut sesuai dengan definisinya,
2. analisis arti dari hipotesis dan kesimpulan yang ada pada pernyataan tersebut,
3. lihat korelasi yang ada antara hipotesis dan kesimpulannya,
4. coba membuktikan dengan memakai salah satu metode pembuktian, untuk pernyataan yang berupa implikasi $(p \rightarrow q)$:
   1. coba buktikan dengan bukti langsung; jika gagal
   2. coba bukti tak langsung dengan kontraposisi; jika gagal
   3. coba bukti dengan kontradiksi

Strategi Pembuktian

"*Begin at the beginning... and go on till you come to the end: then stop.*"
-Lewis Carrol, *Alice's Adventures in Wonderland*, 1865

Ketika dihadapkan pada suatu pernyataan yang ingin dibuktikan/ diperiksa kebenarannya:

1. terjemahkan setiap istilah pada pernyataan tersebut sesuai dengan definisinya,
2. analisis arti dari hipotesis dan kesimpulan yang ada pada pernyataan tersebut,
3. lihat korelasi yang ada antara hipotesis dan kesimpulannya,
4. coba membuktikan dengan memakai salah satu metode pembuktian, untuk pernyataan yang berupa implikasi $(p \to q)$:
    1. coba buktikan dengan bukti langsung; jika gagal
    2. coba bukti tak langsung dengan kontraposisi; jika gagal
    3. coba bukti dengan kontradiksi
5. jika pembuktian gagal, mungkin pernyataan salah.

Bahasan

1. Bukti Tak Langsung dengan Kontradiksi (Falsifikasi)
2. Pembuktian Dua Pernyataan yang Ekuivalen
3. (Contoh) Penyangkal Pernyataan
4. Strategi Pembuktian Sederhana
5. Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Beberapa Kesalahan dalam "Bukti" Matematis

Apa yang salah dengan "teorema" dan "bukti" berikut?

"Teorema"

$1 = -1$

"Bukti"

Perhatikan bahwa $1 =$

Beberapa Kesalahan dalam "Bukti" Matematis

Apa yang salah dengan "teorema" dan "bukti" berikut?

"Teorema"

$1 = -1$

"Bukti"

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} =$

Beberapa Kesalahan dalam "Bukti" Matematis

Apa yang salah dengan "teorema" dan "bukti" berikut?

"Teorema"

$1 = -1$

"Bukti"

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} =$

Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Apa yang salah dengan “teorema” dan “bukti” berikut?

“Teorema”

$1 = -1$

“Bukti”

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} =$

Beberapa Kesalahan dalam "Bukti" Matematis

Apa yang salah dengan "teorema" dan "bukti" berikut?

"Teorema"

$1 = -1$

"Bukti"

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2$

Beberapa Kesalahan dalam “Bukti” Matematis

Apa yang salah dengan “teorema” dan “bukti” berikut?

“Teorema”

$1 = -1$

“Bukti”

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1.$ $\square$

Beberapa Kesalahan dalam "Bukti" Matematis

Apa yang salah dengan "teorema" dan "bukti" berikut?

"Teorema"

$1 = -1$

"Bukti"

Perhatikan bahwa $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1.$ $\square$

Kesalahan ada pada penggunaan fakta bahwa $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}$, penggunaan sifat $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ hanya diperbolehkan ketika setidaknya satu dari a atau b positif. Kesalahan dalam manipulasi fakta-fakta matematis seperti ini disebut kekeliruan matematis (*mathematical fallacy*).

Apakah teorema dan bukti berikut benar?

Teorema

Jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti (?)

Andaikan n^2 genap, maka $n^2 = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ, kita memiliki $n^2 = 4\ell^2 = 2\left(2\ell^2\right)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa n genap. $\square$

Apakah teorema dan bukti berikut benar?

Teorema

Jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti (?)

Andaikan n^2 genap, maka $n^2 = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ, kita memiliki $n^2 = 4\ell^2 = 2\left(2\ell^2\right)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa n genap. $\square$

Teorema di atas benar, salah satu buktinya dapat diperoleh melalui pembuktian dengan kontraposisi.

Apakah teorema dan bukti berikut benar?

Teorema

Jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti (?)

Andaikan n^2 genap, maka $n^2 = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ, kita memiliki $n^2 = 4\ell^2 = 2\left(2\ell^2\right)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa n genap. $\square$

Teorema di atas benar, salah satu buktinya dapat diperoleh melalui pembuktian dengan kontraposisi.
Akan tetapi, "bukti" di atas salah, karena pernyataan "andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ" muncul di dalamnya (tiba-tiba dan tanpa justifikasi).

Apakah teorema dan bukti berikut benar?

Teorema

Jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti (?)

Andaikan n^2 genap, maka $n^2 = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ, kita memiliki $n^2 = 4\ell^2 = 2\left(2\ell^2\right)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa n genap. □

Teorema di atas benar, salah satu buktinya dapat diperoleh melalui pembuktian dengan kontraposisi.

Akan tetapi, "bukti" di atas salah, karena pernyataan "andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ" muncul di dalamnya (tiba-tiba dan tanpa justifikasi). Tidak ada argumen dalam bukti yang dapat menunjukkan bahwa n memang benar-benar dapat ditulis dalam bentuk 2ℓ untuk suatu bilangan bulat ℓ. Justru hal inilah yang ingin ditunjukkan.

Apakah teorema dan bukti berikut benar?

Teorema

Jika n^2 genap, maka n genap.

Bukti (?)

Andaikan n^2 genap, maka $n^2 = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k. Andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ, kita memiliki $n^2 = 4\ell^2 = 2\left(2\ell^2\right)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa n genap. $\square$

Teorema di atas benar, salah satu buktinya dapat diperoleh melalui pembuktian dengan kontraposisi.

Akan tetapi, "bukti" di atas salah, karena pernyataan "andaikan $n = 2\ell$ untuk suatu bilangan bulat ℓ" muncul di dalamnya (tiba-tiba dan tanpa justifikasi). Tidak ada argumen dalam bukti yang dapat menunjukkan bahwa n memang benar-benar dapat ditulis dalam bentuk 2ℓ untuk suatu bilangan bulat ℓ. Justru hal inilah yang ingin ditunjukkan.

Kesalahan seperti ini, yaitu memberikan bukti dengan memakai fakta yang ingin dibuktikan (pada bukti dari fakta tersebut), disebut argumentasi sirkular (*circular reasoning*).