Dasar Teori Graf (Bagian 3)

Graf Planar dan Pewarnaan Graf (*Graph Coloring*)

MZI

Fakultas Informatika
Telkom University

FIF Tel-U

Mei 2023

Acknowledgements

Slide ini disusun berdasarkan materi yang terdapat pada sumber-sumber berikut:

1. *Discrete Mathematics and Its Applications*, Edisi 8, 2019, oleh K. H. Rosen (acuan utama).
2. *Discrete Mathematics with Applications*, Edisi 5, 2018, oleh S. S. Epp.
3. *Mathematics for Computer Science*. MIT, 2010, oleh E. Lehman, F. T. Leighton, A. R. Meyer.
4. *Slide* kuliah Matematika Diskret 2 (2012) di Fasilkom UI oleh B. H. Widjaja.
5. Slide kuliah Matematika Diskret 2 di Fasilkom UI oleh Tim Dosen.
6. *Slide* kuliah Matematika Diskrit di Telkom University oleh B. Purnama dan rekan-rekan.

Beberapa gambar dapat diambil dari sumber-sumber di atas. *Slide* ini ditujukan untuk keperluan akademis di lingkungan FIF Telkom University. Jika Anda memiliki saran/ pendapat/ pertanyaan terkait materi dalam *slide* ini, silakan kirim email ke `<pleasedontspam>@telkomuniversity.ac.id`.

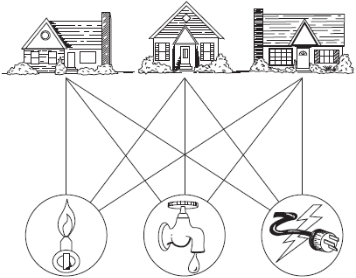
Bahasan

Bahasan

Graf Planar: Motivasi

Permasalahan

Misalkan terdapat tiga rumah yang harus dihubungkan dengan tiga sumberdaya, yaitu: gas, air, dan listrik. Ketiga sumberdaya tersebut akan dihubungkan dengan pipa/ salurannya masing-masing. Untuk mencegah terjadinya kebakaran dan hal buruk lainnya, sebaiknya tidak ada dua pipa untuk sumberdaya berbeda yang saling bersilangan. Apakah hal ini dapat diterapkan?



Permasalahan ini dapat dimodelkan dalam sebuah graf bipartit $K_{3,3}$.

Graf Planar: Definisi

Permasalahan

Diberikan suatu graf tak berarah sederhana $G = (V, E)$, apakah G dapat digambarkan pada suatu bidang datar tanpa sisi-sisi yang saling berpotongan kecuali pada simpul-simpulnya?

Definisi (Graf planar)

Graf Planar: Definisi

Permasalahan

Diberikan suatu graf tak berarah sederhana $G = (V, E)$, apakah G dapat digambarkan pada suatu bidang datar tanpa sisi-sisi yang saling berpotongan kecuali pada simpul-simpulnya?

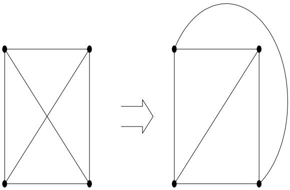
Definisi (Graf planar)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf tak berarah sederhana, G disebut graf planar apabila G dapat digambarkan pada suatu bidang datar tanpa sisi-sisi yang saling berpotongan kecuali pada simpul–simpulnya. Penggambaran ulang dari graf G tersebut (tanpa sisi yang saling berpotongan) disebut (graf) representasi planar dari G. Kemudian graf yang bukan graf planar disebut graf non planar.

Bahasan

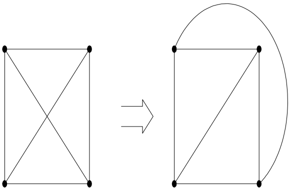
Beberapa Contoh Terkait Graf Planar

Graf lengkap K_4 adalah graf planar.

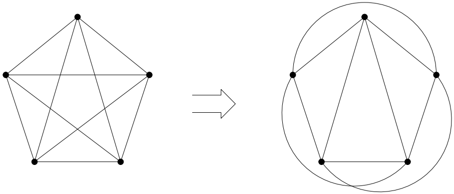


Beberapa Contoh Terkait Graf Planar

Graf lengkap K_4 adalah graf planar.



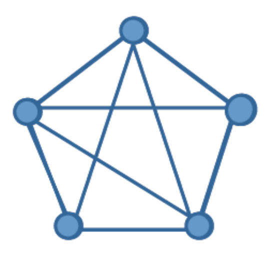
Graf lengkap K_5 **bukan** graf planar.



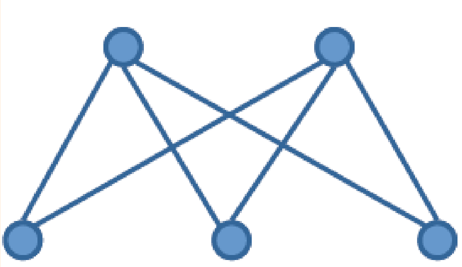
Latihan 1: Graf Planar

Latihan

Periksa apakah dua graf berikut merupakan graf planar atau non planar. Gambarkan graf representasi planarnya jika ada.



Graf G



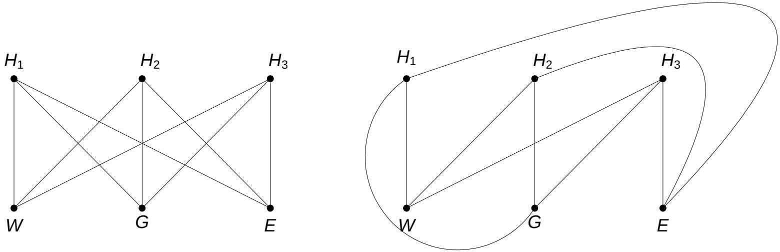
Graf H

Graf yang Tidak Planar

Apakah semua graf merupakan graf planar?

Graf yang Tidak Planar

Apakah semua graf merupakan graf planar? Graf $K_{3,3}$ yang dijelaskan pada bagian awal (permasalahan tiga rumah dan tiga sumberdaya) bukan graf planar.

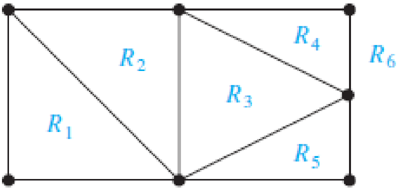


Bukti dan argumen detail terkait hal ini dapat dilihat pada buku teks.

Bahasan

Daerah pada Graf Representasi Planar

Sisi-sisi graf representasi planar pada suatu bidang datar membagi bidang datar tersebut menjadi beberapa daerah (*region*). Daerah pada graf tersebut dapat terbatas (secara informal berarti luasnya terbatas) atau tidak terbatas (secara informal berarti luasnya tidak terbatas). Sebagai contoh perhatikan graf G berikut.



Graf G

Banyaknya daerah pada graf tersebut adalah enam, semua daerah kecuali daerah R_6 adalah daerah terbatas.

Rumus Euler untuk Graf Representasi Planar

Berikut beberapa teorema terkait graf planar dan graf representasi planar, bukti dari teorema-teorema berikut dapat dilihat di buku atau referensi lain.

Teorema

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf planar dan $H = (V, E)$ adalah graf representasi planar untuk graf G. Apabila r menyatakan banyaknya daerah pada H, maka $r = |E| - |V| + 2$.

Teorema (Ketidaksamaan Euler 1 untuk Graf Planar)

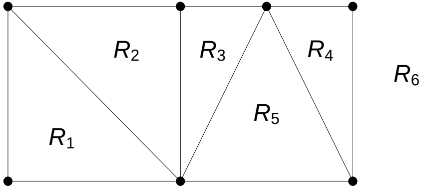
Apabila $G = (V, E)$ adalah sebuah graf terhubung sederhana yang bersifat **planar** dengan $|V| \geq 3$, maka $|E| \leq 3\,|V| - 6$.

Teorema (Ketidaksamaan Euler 2 untuk Graf Planar)

Apabila $G = (V, E)$ adalah sebuah graf terhubung sederhana yang bersifat **planar** dengan $|V| \geq 3$ dan tidak memuat sirkuit dengan panjang 3, maka $|E| \leq 2\,|V| - 4$.

Ilustrasi Persamaan Pertama

Pada graf G berikut

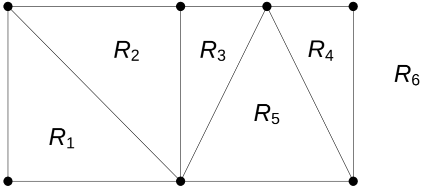


Kita memiliki:

- $r =$

Ilustrasi Persamaan Pertama

Pada graf G berikut

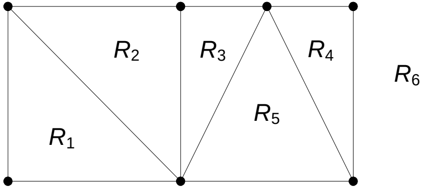


Kita memiliki:

- $r = 6$ (banyaknya daerah adalah 6),
- $|E| =$

Ilustrasi Persamaan Pertama

Pada graf G berikut

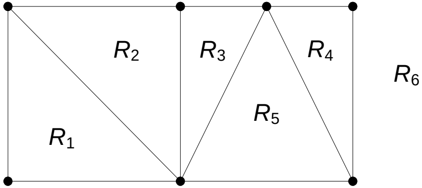


Kita memiliki:

- $r = 6$ (banyaknya daerah adalah 6),
- $|E| = 11$ (banyaknya sisi adalah 11),
- $|V| =$

Ilustrasi Persamaan Pertama

Pada graf G berikut



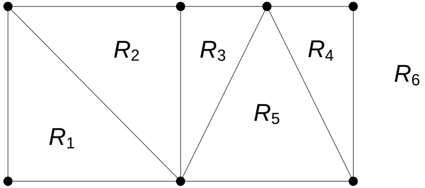
Kita memiliki:

- $r = 6$ (banyaknya daerah adalah 6),
- $|E| = 11$ (banyaknya sisi adalah 11),
- $|V| = 7$.

Perhatikan bahwa

Ilustrasi Persamaan Pertama

Pada graf G berikut



Kita memiliki:

- $r = 6$ (banyaknya daerah adalah 6),
- $|E| = 11$ (banyaknya sisi adalah 11),
- $|V| = 7$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} r &= |E| - |V| + 2 \\ 6 &= 11 - 7 + 2. \end{aligned}$$

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada K_5.

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada K_5. Kita memiliki $|V| =$

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada K_5. Kita memiliki $|V| = 5$. Kemudian karena K_5 adalah graf lengkap, maka
$|E| =$

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada K_5. Kita memiliki $|V| = 5$. Kemudian karena K_5 adalah graf lengkap, maka $|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Tinjau bahwa

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada K_5. Kita memiliki $|V| = 5$. Kemudian karena K_5 adalah graf lengkap, maka $|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Tinjau bahwa $|E| \leq 3|V| - 6$ tidak terpenuhi karena

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada K_5. Kita memiliki $|V| = 5$. Kemudian karena K_5 adalah graf lengkap, maka $|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Tinjau bahwa $|E| \leq 3\,|V| - 6$ tidak terpenuhi karena $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$.

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada K_5. Kita memiliki $|V| = 5$. Kemudian karena K_5 adalah graf lengkap, maka $|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Tinjau bahwa $|E| \leq 3|V| - 6$ tidak terpenuhi karena $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$. Karena K_5 tidak memenuhi ketidaksamaan Euler 1 untuk graf planar, maka K_5 bukan graf planar. $\square$

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada K_5. Kita memiliki $|V| = 5$. Kemudian karena K_5 adalah graf lengkap, maka $|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Tinjau bahwa $|E| \leq 3|V| - 6$ tidak terpenuhi karena $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$. Karena K_5 tidak memenuhi ketidaksamaan Euler 1 untuk graf planar, maka K_5 bukan graf planar. $\square$

Ketidaksamaan Euler 1 untuk graf planar tidak dapat digunakan untuk membuktikan bahwa $K_{3,3}$ adalah graf non planar, jika $|V|$ dan $|E|$ berturut-turut menyatakan banyaknya simpul dan sisi pada $K_{3,3}$, maka $|V| =$

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada K_5. Kita memiliki $|V| = 5$. Kemudian karena K_5 adalah graf lengkap, maka $|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Tinjau bahwa $|E| \leq 3|V| - 6$ tidak terpenuhi karena $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$. Karena K_5 tidak memenuhi ketidaksamaan Euler 1 untuk graf planar, maka K_5 bukan graf planar. $\square$

Ketidaksamaan Euler 1 untuk graf planar tidak dapat digunakan untuk membuktikan bahwa $K_{3,3}$ adalah graf non planar, jika $|V|$ dan $|E|$ berturut-turut menyatakan banyaknya simpul dan sisi pada $K_{3,3}$, maka $|V| = 6$ dan
$|E| =$

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada K_5. Kita memiliki $|V| = 5$. Kemudian karena K_5 adalah graf lengkap, maka $|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Tinjau bahwa $|E| \leq 3|V| - 6$ tidak terpenuhi karena $10 \nleq 3 \cdot 5 - 6$. Karena K_5 tidak memenuhi ketidaksamaan Euler 1 untuk graf planar, maka K_5 bukan graf planar. $\square$

Ketidaksamaan Euler 1 untuk graf planar tidak dapat digunakan untuk membuktikan bahwa $K_{3,3}$ adalah graf non planar, jika $|V|$ dan $|E|$ berturut-turut menyatakan banyaknya simpul dan sisi pada $K_{3,3}$, maka $|V| = 6$ dan $|E| = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$.

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 1

Teorema

K_5 adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada K_5. Kita memiliki $|V| = 5$. Kemudian karena K_5 adalah graf lengkap, maka $|E| = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Tinjau bahwa $|E| \leq 3|V| - 6$ tidak terpenuhi karena $10 \nleq 3 \cdot 5 - 6$. Karena K_5 tidak memenuhi ketidaksamaan Euler 1 untuk graf planar, maka K_5 bukan graf planar. $\square$

Ketidaksamaan Euler 1 untuk graf planar tidak dapat digunakan untuk membuktikan bahwa $K_{3,3}$ adalah graf non planar, jika $|V|$ dan $|E|$ berturut-turut menyatakan banyaknya simpul dan sisi pada $K_{3,3}$, maka $|V| = 6$ dan $|E| = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$. Akibatnya $K_{3,3}$ memenuhi ketidaksamaan Euler 1 untuk graf planar, yaitu $|E| \leq 3|V| - 6$.

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 2

Teorema

$K_{3,3}$ adalah graf non planar.

Bukti

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 2

Teorema

$K_{3,3}$ adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada $K_{3,3}$.

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 2

Teorema

$K_{3,3}$ adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada $K_{3,3}$. Kita memiliki $|V| =$

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 2

Teorema

$K_{3,3}$ adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada $K_{3,3}$. Kita memiliki $|V| = 6$ dan $|E| =$

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 2

Teorema

$K_{3,3}$ adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada $K_{3,3}$. Kita memiliki $|V| = 6$ dan $|E| = 9$.

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 2

Teorema

$K_{3,3}$ adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada $K_{3,3}$. Kita memiliki $|V| = 6$ dan $|E| = 9$. Tinjau bahwa $K_{3,3}$ tidak memuat sirkuit dengan panjang 3 (dapat diperiksa dengan melihat bahwa entri diagonal utama dari matriks $\mathbf{A}^3_{K_{3,3}}$ semuanya bernilai 0).

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 2

Teorema

$K_{3,3}$ adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada $K_{3,3}$. Kita memiliki $|V| = 6$ dan $|E| = 9$. Tinjau bahwa $K_{3,3}$ tidak memuat sirkuit dengan panjang 3 (dapat diperiksa dengan melihat bahwa entri diagonal utama dari matriks $\mathbf{A}^3_{K_{3,3}}$ semuanya bernilai 0). Selanjutnya perhatikan bahwa $|E| \leq 2|V| - 4$ tidak terpenuhi karena

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 2

Teorema

$K_{3,3}$ adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada $K_{3,3}$. Kita memiliki $|V| = 6$ dan $|E| = 9$. Tinjau bahwa $K_{3,3}$ tidak memuat sirkuit dengan panjang 3 (dapat diperiksa dengan melihat bahwa entri diagonal utama dari matriks $\mathbf{A}^3_{K_{3,3}}$ semuanya bernilai 0). Selanjutnya perhatikan bahwa $|E| \leq 2|V| - 4$ tidak terpenuhi karena $9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$.

Contoh Penerapan Ketidaksamaan Euler 2

Teorema

$K_{3,3}$ adalah graf non planar.

Bukti

Misalkan V dan E berturut-turut menyatakan himpunan simpul dan sisi pada $K_{3,3}$. Kita memiliki $|V| = 6$ dan $|E| = 9$. Tinjau bahwa $K_{3,3}$ tidak memuat sirkuit dengan panjang 3 (dapat diperiksa dengan melihat bahwa entri diagonal utama dari matriks $\mathbf{A}_{K_{3,3}}^3$ semuanya bernilai 0). Selanjutnya perhatikan bahwa $|E| \leq 2|V| - 4$ tidak terpenuhi karena $9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$. Karena $K_{3,3}$ tidak memenuhi ketidaksamaan Euler 2 untuk graf planar, maka $K_{3,3}$ bukan graf planar. $\square$

Bahasan

Teorema Kuratowski: Pendahuluan

Pada kajian sebelumnya kita telah melihat bahwa $K_{3,3}$ maupun K_5 bukan graf planar. Pada bagian ini akan dibahas suatu teorema penting yang dapat digunakan untuk memeriksa apakah suatu graf bersifat planar atau tidak (secara efisien). Sebelumnya tinjau beberapa fakta penting berikut:

Teorema Kuratowski: Pendahuluan

Pada kajian sebelumnya kita telah melihat bahwa $K_{3,3}$ maupun K_5 bukan graf planar. Pada bagian ini akan dibahas suatu teorema penting yang dapat digunakan untuk memeriksa apakah suatu graf bersifat planar atau tidak (secara efisien). Sebelumnya tinjau beberapa fakta penting berikut:

1. Graf $K_{3,3}$ maupun K_5 adalah graf teratur (reguler), karena setiap simpulnya berderajat sama.

Teorema Kuratowski: Pendahuluan

Pada kajian sebelumnya kita telah melihat bahwa $K_{3,3}$ maupun K_5 bukan graf planar. Pada bagian ini akan dibahas suatu teorema penting yang dapat digunakan untuk memeriksa apakah suatu graf bersifat planar atau tidak (secara efisien). Sebelumnya tinjau beberapa fakta penting berikut:

1. Graf $K_{3,3}$ maupun K_5 adalah graf teratur (reguler), karena setiap simpulnya berderajat sama.
2. Graf $K_{3,3}$ maupun K_5 bukan graf planar.

Teorema Kuratowski: Pendahuluan

Pada kajian sebelumnya kita telah melihat bahwa $K_{3,3}$ maupun K_5 bukan graf planar. Pada bagian ini akan dibahas suatu teorema penting yang dapat digunakan untuk memeriksa apakah suatu graf bersifat planar atau tidak (secara efisien). Sebelumnya tinjau beberapa fakta penting berikut:

1. Graf $K_{3,3}$ maupun K_5 adalah graf teratur (reguler), karena setiap simpulnya berderajat sama.
2. Graf $K_{3,3}$ maupun K_5 bukan graf planar.
3. Graf $K_{3,3}$ merupakan graf non planar dengan banyak sisi minimum, sedangkan K_5 merupakan graf non planar dengan banyak simpul minimum (penjelasan detail dapat dilihat di buku teks atau referensi lain).

Teorema Kuratowski: Pendahuluan

Pada kajian sebelumnya kita telah melihat bahwa $K_{3,3}$ maupun K_5 bukan graf planar. Pada bagian ini akan dibahas suatu teorema penting yang dapat digunakan untuk memeriksa apakah suatu graf bersifat planar atau tidak (secara efisien). Sebelumnya tinjau beberapa fakta penting berikut:

1. Graf $K_{3,3}$ maupun K_5 adalah graf teratur (reguler), karena setiap simpulnya berderajat sama.
2. Graf $K_{3,3}$ maupun K_5 bukan graf planar.
3. Graf $K_{3,3}$ merupakan graf non planar dengan banyak sisi minimum, sedangkan K_5 merupakan graf non planar dengan banyak simpul minimum (penjelasan detail dapat dilihat di buku teks atau referensi lain).
4. Penghapusan suatu sisi atau simpul dari graf $K_{3,3}$ atau K_5 akan memberikan suatu graf planar (silakan periksa sendiri atau lihat buku teks).

Pembelahan Elementer (*Elementary Subdivision*)

Perhatikan bahwa apabila $G = (V, E)$ adalah suatu graf planar dan $\{u, v\} \in E$, maka graf $H = (W, F)$ yang diperoleh dengan membuang sisi $\{u, v\}$ dan menggantinya dengan sisi $\{u, w\}$ dan $\{w, v\}$ (dengan w adalah suatu simpul baru) juga merupakan graf planar. Dari sifat ini kita dapat mendefinisikan operasi berikut.

Definisi (Pembelahan Elementer/ *Elementary Subdivision*)

Pembelahan Elementer (*Elementary Subdivision*)

Perhatikan bahwa apabila $G = (V, E)$ adalah suatu graf planar dan $\{u, v\} \in E$, maka graf $H = (W, F)$ yang diperoleh dengan membuang sisi $\{u, v\}$ dan menggantinya dengan sisi $\{u, w\}$ dan $\{w, v\}$ (dengan w adalah suatu simpul baru) juga merupakan graf planar. Dari sifat ini kita dapat mendefinisikan operasi berikut.

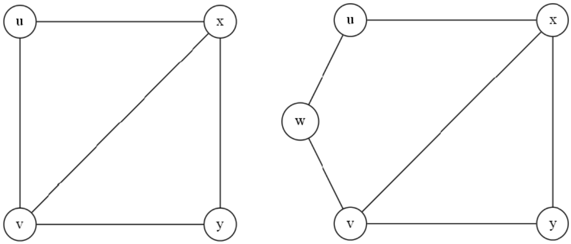
Definisi (Pembelahan Elementer/ *Elementary Subdivision*)

Misalkan $G = (V_G, E_G)$ adalah suatu graf sederhana. Graf $H = (V_H, E_H)$ dikatakan diperoleh dari suatu operasi pembelahan elementer (*elementary subdivision*) dari G apabila H diperoleh dengan mengganti suatu sisi $\{u, v\} \in E_G$ dengan $\{u, w\}$ dan $\{w, v\}$, dengan w merupakan suatu simpul baru. Secara formal keterkaitan antara V_H dan E_H dengan V_G dan E_H dijelaskan berikut

1. $V_H = V_G \cup \{w\}$,
2. $E_H = (E_G \setminus \{\{u, v\}\}) \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\}$.

Contoh Operasi Pembelahan Elementer

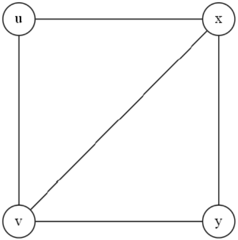
Untuk mempermudah, perhatikan ilustrasi berikut.



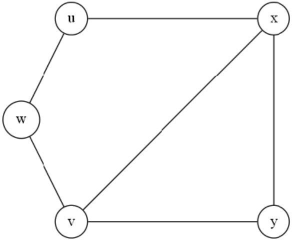
Graf G Graf H

Contoh Operasi Pembelahan Elementer

Untuk mempermudah, perhatikan ilustrasi berikut.



Graf G

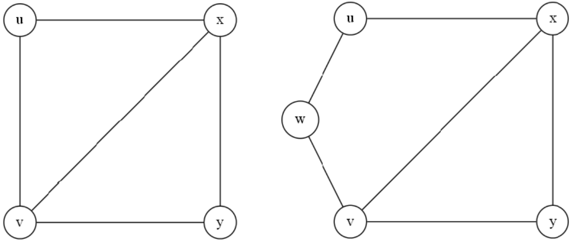


Graf H

Perhatikan bahwa graf H diperoleh dengan melakukan operasi pembelahan elementer terhadap graf G. Sisi yang dihilangkan adalah

Contoh Operasi Pembelahan Elementer

Untuk mempermudah, perhatikan ilustrasi berikut.

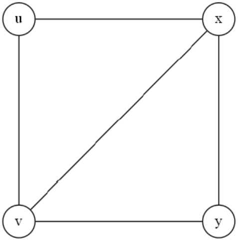


Graf G Graf H

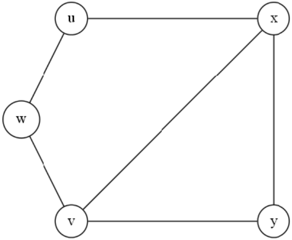
Perhatikan bahwa graf H diperoleh dengan melakukan operasi pembelahan elementer terhadap graf G. Sisi yang dihilangkan adalah $\{u, v\}$, simpul yang ditambahkan adalah

Contoh Operasi Pembelahan Elementer

Untuk mempermudah, perhatikan ilustrasi berikut.



Graf G

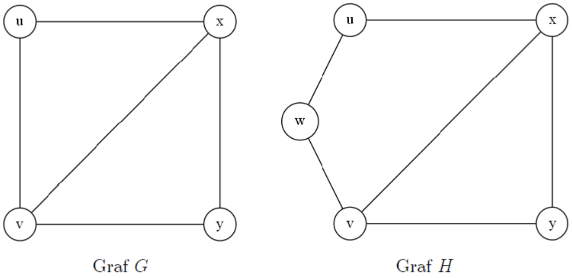


Graf H

Perhatikan bahwa graf H diperoleh dengan melakukan operasi pembelahan elementer terhadap graf G. Sisi yang dihilangkan adalah $\{u, v\}$, simpul yang ditambahkan adalah w, dan sisi baru adalah

Contoh Operasi Pembelahan Elementer

Untuk mempermudah, perhatikan ilustrasi berikut.

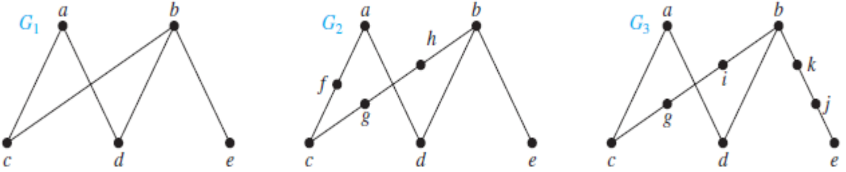


Perhatikan bahwa graf H diperoleh dengan melakukan operasi pembelahan elementer terhadap graf G. Sisi yang dihilangkan adalah $\{u, v\}$, simpul yang ditambahkan adalah w, dan sisi baru adalah $\{u, w\}$ dan $\{w, v\}$.

Dua Graf yang Homeomorfik

Definisi (Dua Graf yang Homeomorfik)

Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua graf sederhana, G_1 dikatakan homeomorfik dengan G_2 apabila G_1 dan G_2 dapat diperoleh dari suatu graf H dengan menerapkan serangkaian operasi pembelahan elementer (tidak harus sama).



Graf G_1, G_2, dan G_3

Perhatikan bahwa

1. G_2 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 3 pembelahan elementer sebagai berikut.

Perhatikan bahwa

1. G_2 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 3 pembelahan elementer sebagai berikut.
    1. Penghapusan sisi $\{a, c\}$, penambahan simpul f, penambahan sisi $\{a, f\}$ dan $\{f, c\}$.

Perhatikan bahwa

1. G_2 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 3 pembelahan elementer sebagai berikut.
   1. Penghapusan sisi $\{a, c\}$, penambahan simpul f, penambahan sisi $\{a, f\}$ dan $\{f, c\}$.
   2. Penghapusan sisi $\{c, b\}$, penambahan simpul g, penambahan sisi $\{c, g\}$ dan $\{g, b\}$.

Perhatikan bahwa

1. G_2 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 3 pembelahan elementer sebagai berikut.
    1. Penghapusan sisi $\{a, c\}$, penambahan simpul f, penambahan sisi $\{a, f\}$ dan $\{f, c\}$.
    2. Penghapusan sisi $\{c, b\}$, penambahan simpul g, penambahan sisi $\{c, g\}$ dan $\{g, b\}$.
    3. Penghapusan sisi $\{g, b\}$, penambahan simpul h, penambahan sisi $\{g, h\}$ dan $\{h, b\}$.

Perhatikan bahwa

1. G_2 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 3 pembelahan elementer sebagai berikut.
    1. Penghapusan sisi $\{a, c\}$, penambahan simpul f, penambahan sisi $\{a, f\}$ dan $\{f, c\}$.
    2. Penghapusan sisi $\{c, b\}$, penambahan simpul g, penambahan sisi $\{c, g\}$ dan $\{g, b\}$.
    3. Penghapusan sisi $\{g, b\}$, penambahan simpul h, penambahan sisi $\{g, h\}$ dan $\{h, b\}$.
2. G_3 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 4 pembelahan elementer sebagai berikut.

Perhatikan bahwa

1. G_2 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 3 pembelahan elementer sebagai berikut.
    1. Penghapusan sisi $\{a, c\}$, penambahan simpul f, penambahan sisi $\{a, f\}$ dan $\{f, c\}$.
    2. Penghapusan sisi $\{c, b\}$, penambahan simpul g, penambahan sisi $\{c, g\}$ dan $\{g, b\}$.
    3. Penghapusan sisi $\{g, b\}$, penambahan simpul h, penambahan sisi $\{g, h\}$ dan $\{h, b\}$.
2. G_3 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 4 pembelahan elementer sebagai berikut.
    1. Penghapusan sisi $\{c, b\}$, penambahan simpul g, penambahan sisi $\{c, g\}$ dan $\{g, b\}$.

Perhatikan bahwa

1. G_2 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 3 pembelahan elementer sebagai berikut.
    1. Penghapusan sisi $\{a, c\}$, penambahan simpul f, penambahan sisi $\{a, f\}$ dan $\{f, c\}$.
    2. Penghapusan sisi $\{c, b\}$, penambahan simpul g, penambahan sisi $\{c, g\}$ dan $\{g, b\}$.
    3. Penghapusan sisi $\{g, b\}$, penambahan simpul h, penambahan sisi $\{g, h\}$ dan $\{h, b\}$.
2. G_3 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 4 pembelahan elementer sebagai berikut.
    1. Penghapusan sisi $\{c, b\}$, penambahan simpul g, penambahan sisi $\{c, g\}$ dan $\{g, b\}$.
    2. Penghapusan sisi $\{g, b\}$, penambahan simpul i, penambahan sisi $\{g, i\}$ dan $\{i, b\}$.

Perhatikan bahwa

1. G_2 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 3 pembelahan elementer sebagai berikut.
    1. Penghapusan sisi $\{a, c\}$, penambahan simpul f, penambahan sisi $\{a, f\}$ dan $\{f, c\}$.
    2. Penghapusan sisi $\{c, b\}$, penambahan simpul g, penambahan sisi $\{c, g\}$ dan $\{g, b\}$.
    3. Penghapusan sisi $\{g, b\}$, penambahan simpul h, penambahan sisi $\{g, h\}$ dan $\{h, b\}$.
2. G_3 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 4 pembelahan elementer sebagai berikut.
    1. Penghapusan sisi $\{c, b\}$, penambahan simpul g, penambahan sisi $\{c, g\}$ dan $\{g, b\}$.
    2. Penghapusan sisi $\{g, b\}$, penambahan simpul i, penambahan sisi $\{g, i\}$ dan $\{i, b\}$.
    3. Penghapusan sisi $\{b, e\}$, penambahan simpul k, penambahan sisi $\{b, k\}$ dan $\{k, e\}$.

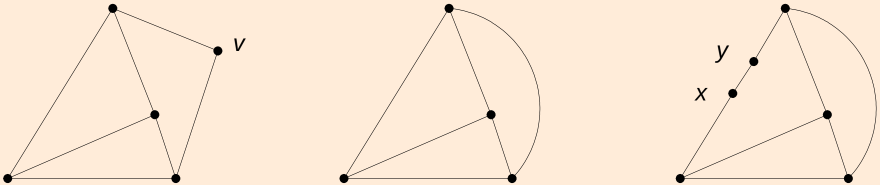
Perhatikan bahwa

1. G_2 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 3 pembelahan elementer sebagai berikut.
    1. Penghapusan sisi $\{a, c\}$, penambahan simpul f, penambahan sisi $\{a, f\}$ dan $\{f, c\}$.
    2. Penghapusan sisi $\{c, b\}$, penambahan simpul g, penambahan sisi $\{c, g\}$ dan $\{g, b\}$.
    3. Penghapusan sisi $\{g, b\}$, penambahan simpul h, penambahan sisi $\{g, h\}$ dan $\{h, b\}$.
2. G_3 dapat diperoleh dari G_1 dengan menerapkan 4 pembelahan elementer sebagai berikut.
    1. Penghapusan sisi $\{c, b\}$, penambahan simpul g, penambahan sisi $\{c, g\}$ dan $\{g, b\}$.
    2. Penghapusan sisi $\{g, b\}$, penambahan simpul i, penambahan sisi $\{g, i\}$ dan $\{i, b\}$.
    3. Penghapusan sisi $\{b, e\}$, penambahan simpul k, penambahan sisi $\{b, k\}$ dan $\{k, e\}$.
    4. Penghapusan sisi $\{k, e\}$, penambahan simpul j, penambahan sisi $\{k, j\}$ dan $\{j, e\}$.

Latihan 2: Memeriksa Sifat Homeomorfik

Latihan

Misalkan G_1, G_2, dan G_3 berturut-turut adalah graf pada gambar berikut (dari kiri ke kanan).



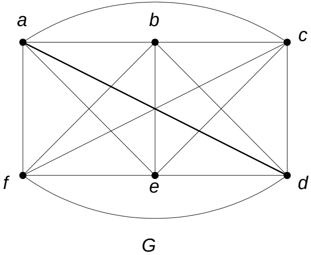
Periksa apakah ketiga graf tersebut homeomorfik atau tidak.

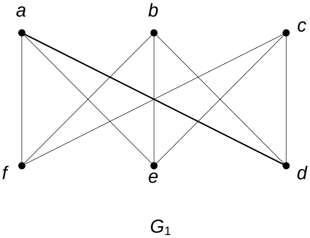
Teorema Kuratowski

Teorema (Teorema Kuratowski)

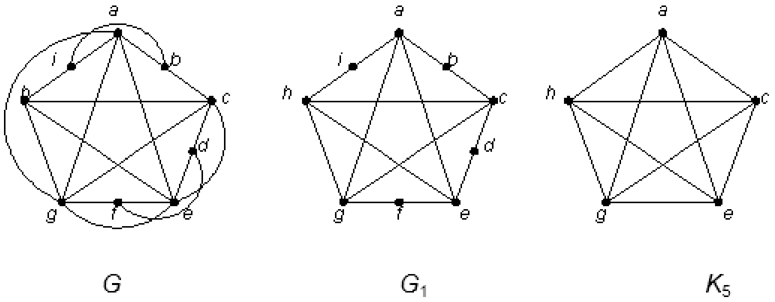
Graf G bersifat non planar jika dan hanya jika G memuat subgraf yang homeomorfik dengan $K_{3,3}$ atau K_5.

Ilustrasi Teorema Kuratowski





Pada gambar di atas, graf G adalah graf non planar karena G memuat subgraf G_1 yang isomorfik (dan akibatnya homeomorfik) dengan $K_{3,3}$.

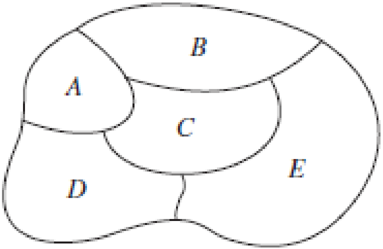


Pada gambar di atas, graf G adalah graf non planar karena memuat subgraf G_1 yang homeomorfik dengan K_5.

Bahasan

Pewarnaan Graf: Motivasi

Tentukan banyak warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai peta berikut sehingga tidak ada dua daerah yang bertetangga dan berwarna sama.



Gambar Peta

Berapa banyak warna berbeda yang diperlukan untuk mewarnai peta Indonesia sehingga tidak ada dua daerah (provinsi) yang bertetangga dan berwarna sama?

Pewarnaan Graf: Definisi

Dalam teori graf ada dua jenis pewarnaan graf yang banyak dibahas, yaitu pewarnaan simpul dan pewarnaan sisi. Pada kuliah ini hanya akan dibahas mengenai pewarnaan simpul saja. Jadi istilah pewarnaan graf mengacu pada pewarnaan simpul dari suatu graf.

Definisi (Pewarnaan Graf)

Pewarnaan Graf: Definisi

Dalam teori graf ada dua jenis pewarnaan graf yang banyak dibahas, yaitu pewarnaan simpul dan pewarnaan sisi. Pada kuliah ini hanya akan dibahas mengenai pewarnaan simpul saja. Jadi istilah pewarnaan graf mengacu pada pewarnaan simpul dari suatu graf.

Definisi (Pewarnaan Graf)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf sederhana. Pewarnaan graf G adalah pemberian label warna pada simpul-simpul G sedemikian hingga dua simpul yang **bertetangga** pada G memiliki **warna yang berbeda**.

Tentunya apabila $G = (V, E)$ dan $|V| = n$, maka simpul-simpul pada G dapat diwarnai dengan n warna berbeda. Hal ini tentunya tidak terlalu menarik.

Bahasan

Bilangan Kromatik

Permasalahan

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf sederhana. Berapa banyak warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai graf tersebut?

Definisi (Bilangan Kromatik)

Bilangan Kromatik

Permasalahan

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf sederhana. Berapa banyak warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai graf tersebut?

Definisi (Bilangan Kromatik)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf sederhana, bilangan kromatik dari G, dinotasikan dengan $\chi(G)$, didefinisikan sebagai banyak warna **minimal** yang diperlukan untuk mewarnai graf tersebut.

Teorema Empat Warna (*Four Colors Theorem*)

Teorema (Teorema Empat Warna)

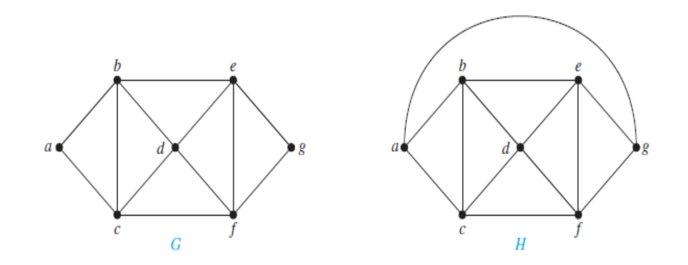
Misalkan G adalah suatu graf planar, maka maka $\chi(G) \leq 4$.

Bukti dari teorema di atas tidak mudah, silakan lihat referensi terkait pewarnaan graf jika Anda tertarik.

Latihan 3: Penentuan Bilangan Kromatik

Latihan

Tentukan bilangan kromatik dari kedua graf berikut.



Graf G dan H

Solusi Latihan 3

Bilangan kromatik untuk G, $\chi(G)$, memenuhi $\chi(G) \geq 3$, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = 3$ dengan memberi warna sebagai berikut

Solusi Latihan 3

Bilangan kromatik untuk G, $\chi(G)$, memenuhi $\chi(G) \geq 3$, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = 3$ dengan memberi warna sebagai berikut

1. simpul a diberi warna merah, simpul b diberi warna biru, dan simpul c diberi warna hijau,

Solusi Latihan 3

Bilangan kromatik untuk G, $\chi(G)$, memenuhi $\chi(G) \geq 3$, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = 3$ dengan memberi warna sebagai berikut

1. simpul a diberi warna merah, simpul b diberi warna biru, dan simpul c diberi warna hijau,
2. karena d bertetangga dengan b (berwarna biru) dan c (berwarna hijau), maka d harus berwarna merah,

Solusi Latihan 3

Bilangan kromatik untuk G, $\chi(G)$, memenuhi $\chi(G) \geq 3$, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = 3$ dengan memberi warna sebagai berikut

1. simpul a diberi warna merah, simpul b diberi warna biru, dan simpul c diberi warna hijau,
2. karena d bertetangga dengan b (berwarna biru) dan c (berwarna hijau), maka d harus berwarna merah,
3. karena e bertetangga dengan b (berwarna biru) dan d (berwarna merah), maka e harus berwarna hijau,

Solusi Latihan 3

Bilangan kromatik untuk G, $\chi(G)$, memenuhi $\chi(G) \geq 3$, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = 3$ dengan memberi warna sebagai berikut

1. simpul a diberi warna merah, simpul b diberi warna biru, dan simpul c diberi warna hijau,
2. karena d bertetangga dengan b (berwarna biru) dan c (berwarna hijau), maka d harus berwarna merah,
3. karena e bertetangga dengan b (berwarna biru) dan d (berwarna merah), maka e harus berwarna hijau,
4. karena f bertetangga dengan c (berwarna hijau) dan d (berwarna merah), maka f harus berwarna biru,

Solusi Latihan 3

Bilangan kromatik untuk G, $\chi(G)$, memenuhi $\chi(G) \geq 3$, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = 3$ dengan memberi warna sebagai berikut

1. simpul a diberi warna merah, simpul b diberi warna biru, dan simpul c diberi warna hijau,
2. karena d bertetangga dengan b (berwarna biru) dan c (berwarna hijau), maka d harus berwarna merah,
3. karena e bertetangga dengan b (berwarna biru) dan d (berwarna merah), maka e harus berwarna hijau,
4. karena f bertetangga dengan c (berwarna hijau) dan d (berwarna merah), maka f harus berwarna biru,
5. karena g bertetangga dengan e (berwarna hijau) dan f (berwarna hijau), maka g harus berwarna merah.

Solusi Latihan 3

Bilangan kromatik untuk G, $\chi(G)$, memenuhi $\chi(G) \geq 3$, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = 3$ dengan memberi warna sebagai berikut

1. simpul a diberi warna merah, simpul b diberi warna biru, dan simpul c diberi warna hijau,
2. karena d bertetangga dengan b (berwarna biru) dan c (berwarna hijau), maka d harus berwarna merah,
3. karena e bertetangga dengan b (berwarna biru) dan d (berwarna merah), maka e harus berwarna hijau,
4. karena f bertetangga dengan c (berwarna hijau) dan d (berwarna merah), maka f harus berwarna biru,
5. karena g bertetangga dengan e (berwarna hijau) dan f (berwarna hijau), maka g harus berwarna merah.

Jadi dapat disimpulkan $\chi(G) = 3$.

Solusi Latihan 3

Bilangan kromatik untuk G, $\chi(G)$, memenuhi $\chi(G) \geq 3$, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = 3$ dengan memberi warna sebagai berikut

1. simpul a diberi warna merah, simpul b diberi warna biru, dan simpul c diberi warna hijau,
2. karena d bertetangga dengan b (berwarna biru) dan c (berwarna hijau), maka d harus berwarna merah,
3. karena e bertetangga dengan b (berwarna biru) dan d (berwarna merah), maka e harus berwarna hijau,
4. karena f bertetangga dengan c (berwarna hijau) dan d (berwarna merah), maka f harus berwarna biru,
5. karena g bertetangga dengan e (berwarna hijau) dan f (berwarna hijau), maka g harus berwarna merah.

Jadi dapat disimpulkan $\chi(G) = 3$. Bilangan kromatik untuk H, $\chi(H)$

Solusi Latihan 3

Bilangan kromatik untuk G, $\chi(G)$, memenuhi $\chi(G) \geq 3$, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = 3$ dengan memberi warna sebagai berikut

1. simpul a diberi warna merah, simpul b diberi warna biru, dan simpul c diberi warna hijau,
2. karena d bertetangga dengan b (berwarna biru) dan c (berwarna hijau), maka d harus berwarna merah,
3. karena e bertetangga dengan b (berwarna biru) dan d (berwarna merah), maka e harus berwarna hijau,
4. karena f bertetangga dengan c (berwarna hijau) dan d (berwarna merah), maka f harus berwarna biru,
5. karena g bertetangga dengan e (berwarna hijau) dan f (berwarna hijau), maka g harus berwarna merah.

Jadi dapat disimpulkan $\chi(G) = 3$. Bilangan kromatik untuk H, $\chi(H) \geq 4$, karena simpul a, b, c, dan g harus diberi warna berbeda.

Solusi Latihan 3

Bilangan kromatik untuk G, $\chi(G)$, memenuhi $\chi(G) \geq 3$, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = 3$ dengan memberi warna sebagai berikut

1. simpul a diberi warna merah, simpul b diberi warna biru, dan simpul c diberi warna hijau,
2. karena d bertetangga dengan b (berwarna biru) dan c (berwarna hijau), maka d harus berwarna merah,
3. karena e bertetangga dengan b (berwarna biru) dan d (berwarna merah), maka e harus berwarna hijau,
4. karena f bertetangga dengan c (berwarna hijau) dan d (berwarna merah), maka f harus berwarna biru,
5. karena g bertetangga dengan e (berwarna hijau) dan f (berwarna hijau), maka g harus berwarna merah.

Jadi dapat disimpulkan $\chi(G) = 3$. Bilangan kromatik untuk H, $\chi(H) \geq 4$, karena simpul a, b, c, dan g harus diberi warna berbeda. Kemudian pewarnaan untuk simpul d, e, f dapat dilakukan seperti pewarnaan untuk graf G. Akibatnya diperoleh $\chi(H) =$

Solusi Latihan 3

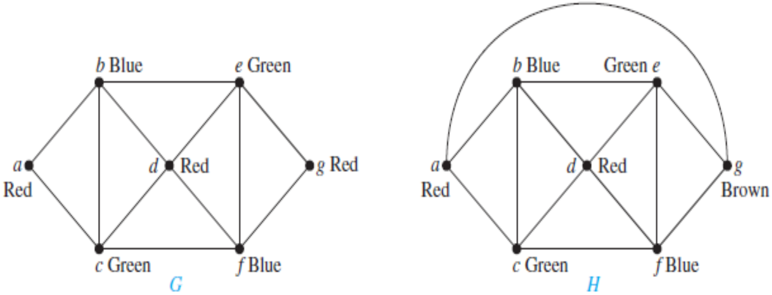
Bilangan kromatik untuk G, $\chi(G)$, memenuhi $\chi(G) \geq 3$, karena simpul a, b, dan c harus diberi warna yang berbeda. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi(G) = 3$ dengan memberi warna sebagai berikut

1. simpul a diberi warna merah, simpul b diberi warna biru, dan simpul c diberi warna hijau,
2. karena d bertetangga dengan b (berwarna biru) dan c (berwarna hijau), maka d harus berwarna merah,
3. karena e bertetangga dengan b (berwarna biru) dan d (berwarna merah), maka e harus berwarna hijau,
4. karena f bertetangga dengan c (berwarna hijau) dan d (berwarna merah), maka f harus berwarna biru,
5. karena g bertetangga dengan e (berwarna hijau) dan f (berwarna hijau), maka g harus berwarna merah.

Jadi dapat disimpulkan $\chi(G) = 3$. Bilangan kromatik untuk H, $\chi(H) \geq 4$, karena simpul a, b, c, dan g harus diberi warna berbeda. Kemudian pewarnaan untuk simpul d, e, f dapat dilakukan seperti pewarnaan untuk graf G. Akibatnya diperoleh $\chi(H) = 4$.

Ilustrasi untuk Solusi Latihan 3

Berikut ilustrasi pewarnaan graf yang dapat dilakukan.



Pewarnaan untuk Graf G dan H

Bahasan

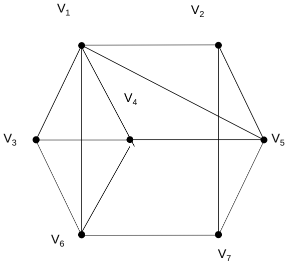
Algoritma Welsh-Powell

Algoritma Welsh-Powell merupakan suatu prosedur yang efisien untuk mewarnai suatu graf.

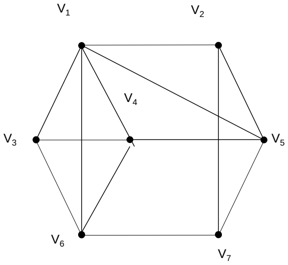
Algoritma Welsh-Powell

1. Misalkan $G = (V, E)$ dengan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
2. Urutkan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ mulai dari simpul dengan derajat terbesar hingga simpul dengan derajat terkecil. Cara pengurutan dapat berbeda-beda jika terdapat dua simpul atau lebih yang derajatnya sama.
3. Warnai simpul dengan derajat terbesar terlebih dulu dengan warna ke-1. Pewarnaan dilakukan secara berurut sehingga setiap simpul dalam daftar yang tidak bertetangga dengan simpul sebelumnya diwarnai dengan warna ini.
4. Ulangi langkah 3 untuk simpul dengan derajat terbesar yang belum diwarnai.
5. Langkah 4 dilakukan hingga semua simpul selesai diwarnai.

Contoh Penerapan Algoritma Welsh-Powell

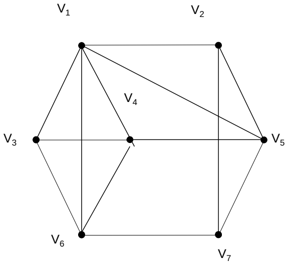


Contoh Penerapan Algoritma Welsh-Powell



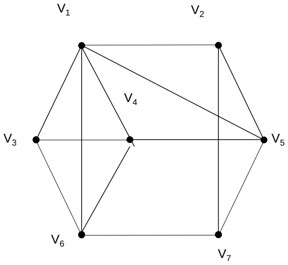
Simpul	v_1	v_4	v_5	v_6	v_2	v_3	v_7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna							

Contoh Penerapan Algoritma Welsh-Powell



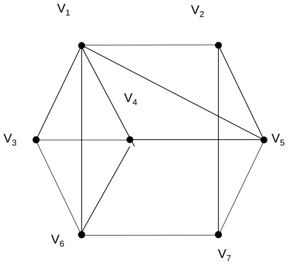
Simpul	v_1	v_4	v_5	v_6	v_2	v_3	v_7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	$merah$						

Contoh Penerapan Algoritma Welsh-Powell



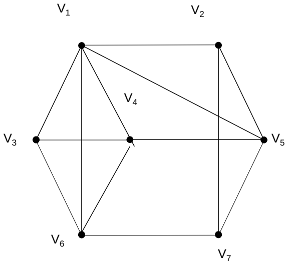
Simpul	v_1	v_4	v_5	v_6	v_2	v_3	v_7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	*merah*	*kuning*					

Contoh Penerapan Algoritma Welsh-Powell



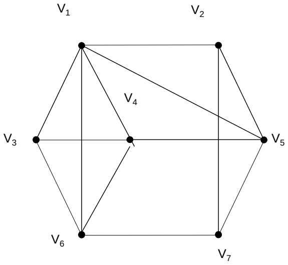
Simpul	v_1	v_4	v_5	v_6	v_2	v_3	v_7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	*merah*	*kuning*	*hijau*				

Contoh Penerapan Algoritma Welsh-Powell



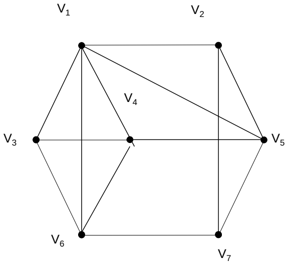
Simpul	v_1	v_4	v_5	v_6	v_2	v_3	v_7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	*merah*	*kuning*	*hijau*	*hijau*			

Contoh Penerapan Algoritma Welsh-Powell



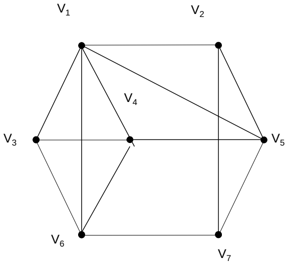
Simpul	v_1	v_4	v_5	v_6	v_2	v_3	v_7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	*merah*	*kuning*	*hijau*	*hijau*	*kuning*		

Contoh Penerapan Algoritma Welsh-Powell



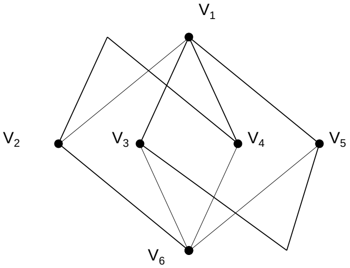
Simpul	v_1	v_4	v_5	v_6	v_2	v_3	v_7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	*merah*	*kuning*	*hijau*	*hijau*	*kuning*	*biru*	

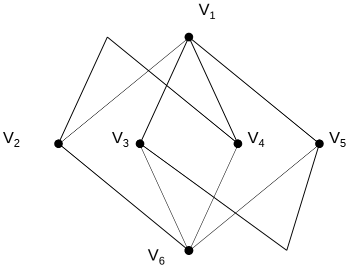
Contoh Penerapan Algoritma Welsh-Powell



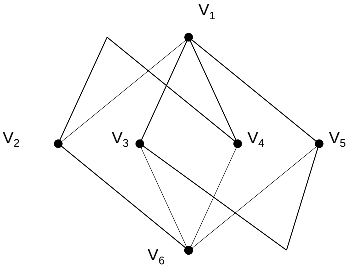
Simpul	v_1	v_4	v_5	v_6	v_2	v_3	v_7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	*merah*	*kuning*	*hijau*	*hijau*	*kuning*	*biru*	*merah*

Kita memiliki $\chi(G) = 4$.

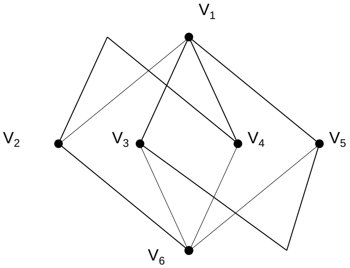

V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_6



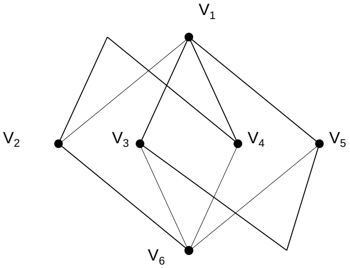
Simpul	v_1	v_6	v_2	v_3	v_4	v_5
Derajat	4	4	3	3	3	3
Warna						



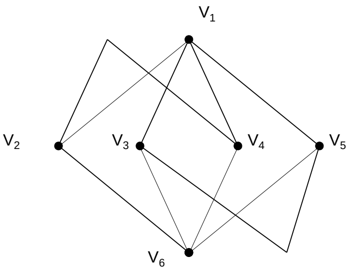
Simpul	v_1	v_6	v_2	v_3	v_4	v_5
Derajat	4	4	3	3	3	3
Warna	*merah*					



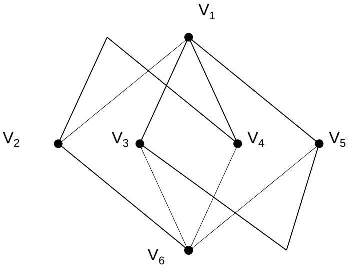
Simpul	v_1	v_6	v_2	v_3	v_4	v_5
Derajat	4	4	3	3	3	3
Warna	*merah*	*merah*				



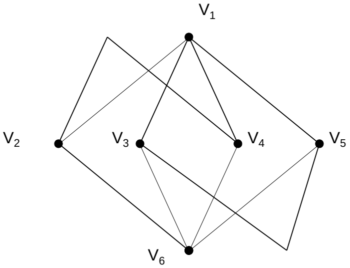
Simpul	v_1	v_6	v_2	v_3	v_4	v_5
Derajat	4	4	3	3	3	3
Warna	*merah*	*merah*	*kuning*			



Simpul	v_1	v_6	v_2	v_3	v_4	v_5
Derajat	4	4	3	3	3	3
Warna	*merah*	*merah*	*kuning*	*kuning*		

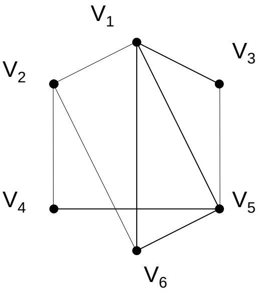


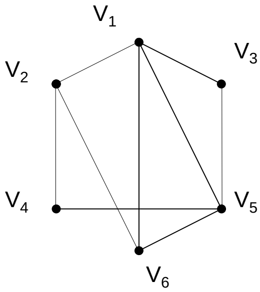
Simpul	v_1	v_6	v_2	v_3	v_4	v_5
Derajat	4	4	3	3	3	3
Warna	*merah*	*merah*	*kuning*	*kuning*	*hijau*	



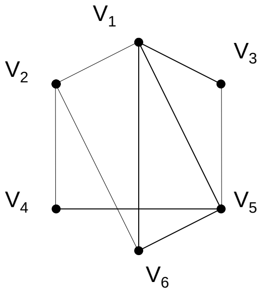
Simpul	v_1	v_6	v_2	v_3	v_4	v_5
Derajat	4	4	3	3	3	3
Warna	*merah*	*merah*	*kuning*	*kuning*	*hijau*	*hijau*

Kita memiliki $\chi(G) = 3$.

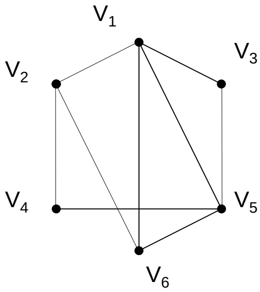

V1
V2
V3
V4
V5
V6



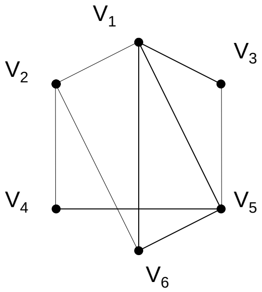
Simpul	v_1	v_5	v_2	v_6	v_3	v_4
Derajat	4	4	3	3	2	2
Warna						



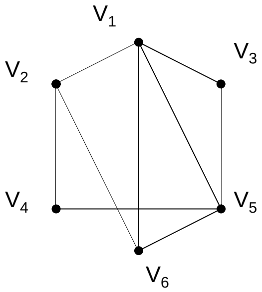
Simpul	v_1	v_5	v_2	v_6	v_3	v_4
Derajat	4	4	3	3	2	2
Warna	*merah*					



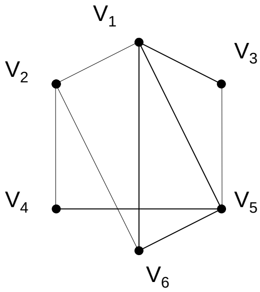
Simpul	v_1	v_5	v_2	v_6	v_3	v_4
Derajat	4	4	3	3	2	2
Warna	$merah$	$kuning$				



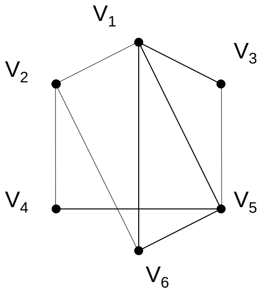
Simpul	v_1	v_5	v_2	v_6	v_3	v_4
Derajat	4	4	3	3	2	2
Warna	$merah$	$kuning$	$kuning$			



Simpul	v_1	v_5	v_2	v_6	v_3	v_4
Derajat	4	4	3	3	2	2
Warna	*merah*	*kuning*	*kuning*	*hijau*		



Simpul	v_1	v_5	v_2	v_6	v_3	v_4
Derajat	4	4	3	3	2	2
Warna	*merah*	*kuning*	*kuning*	*hijau*	*hijau*	



Simpul	v_1	v_5	v_2	v_6	v_3	v_4
Derajat	4	4	3	3	2	2
Warna	$merah$	$kuning$	$kuning$	$hijau$	$hijau$	$merah$

Kita memiliki $\chi(G) = 3$.

Bahasan

Aplikasi Pewarnaan Graf: Penjadwalan

Permasalahan

Misalkan terdapat lima mata kuliah yang akan ditentukan slot jadwal ujiannya, yaitu:

Aplikasi Pewarnaan Graf: Penjadwalan

Permasalahan

Misalkan terdapat lima mata kuliah yang akan ditentukan slot jadwal ujiannya, yaitu: Struktur Data (**SD**), Matematika Diskret (**MD**), Matriks dan Ruang Vektor (**MRV**), Kalkulus (**K**), serta Fisika (**F**).

Aplikasi Pewarnaan Graf: Penjadwalan

Permasalahan

Misalkan terdapat lima mata kuliah yang akan ditentukan slot jadwal ujiannya, yaitu: Struktur Data (**SD**), Matematika Diskret (**MD**), Matriks dan Ruang Vektor (**MRV**), Kalkulus (**K**), serta Fisika (**F**).

Misalkan: mahasiswa yang mengambil SD juga mengambil empat kuliah lain,

Aplikasi Pewarnaan Graf: Penjadwalan

Permasalahan

Misalkan terdapat lima mata kuliah yang akan ditentukan slot jadwal ujiannya, yaitu: Struktur Data (**SD**), Matematika Diskret (**MD**), Matriks dan Ruang Vektor (**MRV**), Kalkulus (**K**), serta Fisika (**F**).

Misalkan: mahasiswa yang mengambil SD juga mengambil empat kuliah lain, mahasiswa yang mengambil MD juga mengambil semua kuliah lain kecuali K,

Aplikasi Pewarnaan Graf: Penjadwalan

Permasalahan

Misalkan terdapat lima mata kuliah yang akan ditentukan slot jadwal ujiannya, yaitu: Struktur Data (**SD**), Matematika Diskret (**MD**), Matriks dan Ruang Vektor (**MRV**), Kalkulus (**K**), serta Fisika (**F**).

Misalkan: mahasiswa yang mengambil SD juga mengambil empat kuliah lain, mahasiswa yang mengambil MD juga mengambil semua kuliah lain kecuali K, mahasiswa yang mengambil MRV juga mengambil semua kuliah lain kecuali F,

Aplikasi Pewarnaan Graf: Penjadwalan

Permasalahan

Misalkan terdapat lima mata kuliah yang akan ditentukan slot jadwal ujiannya, yaitu: Struktur Data (**SD**), Matematika Diskret (**MD**), Matriks dan Ruang Vektor (**MRV**), Kalkulus (**K**), serta Fisika (**F**).

Misalkan: mahasiswa yang mengambil SD juga mengambil empat kuliah lain, mahasiswa yang mengambil MD juga mengambil semua kuliah lain kecuali K, mahasiswa yang mengambil MRV juga mengambil semua kuliah lain kecuali F, mahasiswa yang mengambil K juga mengambil semua kuliah lain kecuali MD, dan

Aplikasi Pewarnaan Graf: Penjadwalan

Permasalahan

Misalkan terdapat lima mata kuliah yang akan ditentukan slot jadwal ujiannya, yaitu: Struktur Data (**SD**), Matematika Diskret (**MD**), Matriks dan Ruang Vektor (**MRV**), Kalkulus (**K**), serta Fisika (**F**).

Misalkan: mahasiswa yang mengambil SD juga mengambil empat kuliah lain, mahasiswa yang mengambil MD juga mengambil semua kuliah lain kecuali K, mahasiswa yang mengambil MRV juga mengambil semua kuliah lain kecuali F, mahasiswa yang mengambil K juga mengambil semua kuliah lain kecuali MD, dan mahasiswa yang mengambil F juga mengambil semua kuliah lain kecuali MRV.

Aplikasi Pewarnaan Graf: Penjadwalan

Permasalahan

Misalkan terdapat lima mata kuliah yang akan ditentukan slot jadwal ujiannya, yaitu: Struktur Data (**SD**), Matematika Diskret (**MD**), Matriks dan Ruang Vektor (**MRV**), Kalkulus (**K**), serta Fisika (**F**).

Misalkan: mahasiswa yang mengambil SD juga mengambil empat kuliah lain, mahasiswa yang mengambil MD juga mengambil semua kuliah lain kecuali K, mahasiswa yang mengambil MRV juga mengambil semua kuliah lain kecuali F, mahasiswa yang mengambil K juga mengambil semua kuliah lain kecuali MD, dan mahasiswa yang mengambil F juga mengambil semua kuliah lain kecuali MRV.

Tentukan banyak minimal slot waktu berbeda yang diperlukan agar **tidak ada** mahasiswa yang harus mengikuti dua ujian berbeda pada waktu yang sama.

Solusi Permasalahan: Model Graf

Pertama definisikan graf tak berarah $G = (V, E)$ dengan $V = \{\text{SD, MD, MRV, K, F}\}$.

Solusi Permasalahan: Model Graf

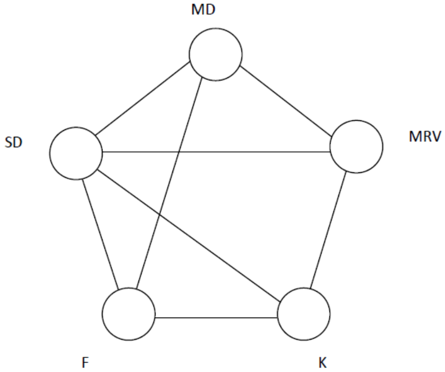
Pertama definisikan graf tak berarah $G = (V, E)$ dengan $V = \{\text{SD, MD, MRV, K, F}\}$. Dua simpul $u, v \in V$ dihubungkan oleh satu sisi jika dan hanya jika terdapat mahasiswa yang mengambil kuliah u dan v.

Solusi Permasalahan: Model Graf

Pertama definisikan graf tak berarah $G = (V, E)$ dengan $V = \{\text{SD, MD, MRV, K, F}\}$. Dua simpul $u, v \in V$ dihubungkan oleh satu sisi jika dan hanya jika terdapat mahasiswa yang mengambil kuliah u dan v. Jadi kita memiliki graf pada gambar berikut.

Solusi Permasalahan: Model Graf

Pertama definisikan graf tak berarah $G = (V, E)$ dengan $V = \{\text{SD, MD, MRV, K, F}\}$. Dua simpul $u, v \in V$ dihubungkan oleh satu sisi jika dan hanya jika terdapat mahasiswa yang mengambil kuliah u dan v. Jadi kita memiliki graf pada gambar berikut.



Solusi Permasalahan: Pewarnaan Graf

Menentukan banyak minimal slot waktu berbeda yang diperlukan setara dengan menentukan banyak minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G sehingga dua simpul yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama.

Solusi Permasalahan: Pewarnaan Graf

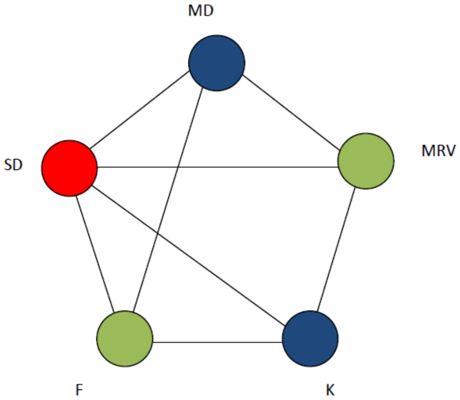
Menentukan banyak minimal slot waktu berbeda yang diperlukan setara dengan menentukan banyak minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G sehingga dua simpul yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Dengan perkataan lain menentukan banyak minimal slot waktu berbeda setara dengan menentukan $\chi(G)$.

Solusi Permasalahan: Pewarnaan Graf

Menentukan banyak minimal slot waktu berbeda yang diperlukan setara dengan menentukan banyak minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G sehingga dua simpul yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Dengan perkataan lain menentukan banyak minimal slot waktu berbeda setara dengan menentukan $\chi(G)$. Perhatikan bahwa pewarnaan minimal dapat dilakukan berikut.

Solusi Permasalahan: Pewarnaan Graf

Menentukan banyak minimal slot waktu berbeda yang diperlukan setara dengan menentukan banyak minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G sehingga dua simpul yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Dengan perkataan lain menentukan banyak minimal slot waktu berbeda setara dengan menentukan $\chi(G)$. Perhatikan bahwa pewarnaan minimal dapat dilakukan berikut.



Dari ilustrasi di sebelumnya dapat disimpulkan bahwa $\chi(G) =$

Dari ilustrasi di sebelumnya dapat disimpulkan bahwa $\chi(G) = 3$. (Argumen detail mengenai hal ini diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.) Jadi terdapat tiga slot ujian berbeda, dengan ujian MD dan K diadakan pada hari yang sama, serta ujian MRV dan F diadakan pada hari yang sama.