

TTH3A4 - Sistem Komunikasi



Modulasi Digital: QAM & FSK

Tujuan Pembelajaran

- Mengetahui prinsip modulasi & demodulasi QAM dan menghitung probabilitas error
- Mengetahui prinsip modulasi & demodulasi M-FSK dan menghitung probabilitas error

- Quadrature Amplitude Modulation
 - Persamaan
 - Bentuk sinyal
 - Konstelasi
 - Blok Modulator dan demodulator
 - Probabilitas Error
- Frequency Shift Keying
 - Persamaan
 - Sinyal FSK
 - Konstelasi
 - Blok Modulator dan demodulator
 - Probabilitas Error

Quadrature Amplitude Modulation (QAM)

Definisi dan Persamaan QAM

Modulasi QAM membedakan symbol berdasarkan amplitude $\sqrt{\frac{2E_i}{T}}$ dan sudut fasanya φ_i

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i}{T}} \cos(\omega_c t + \varphi_i) \qquad s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{T}} a_k \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2E_0}{T}} b_k \sin(2\pi f_c t)$$

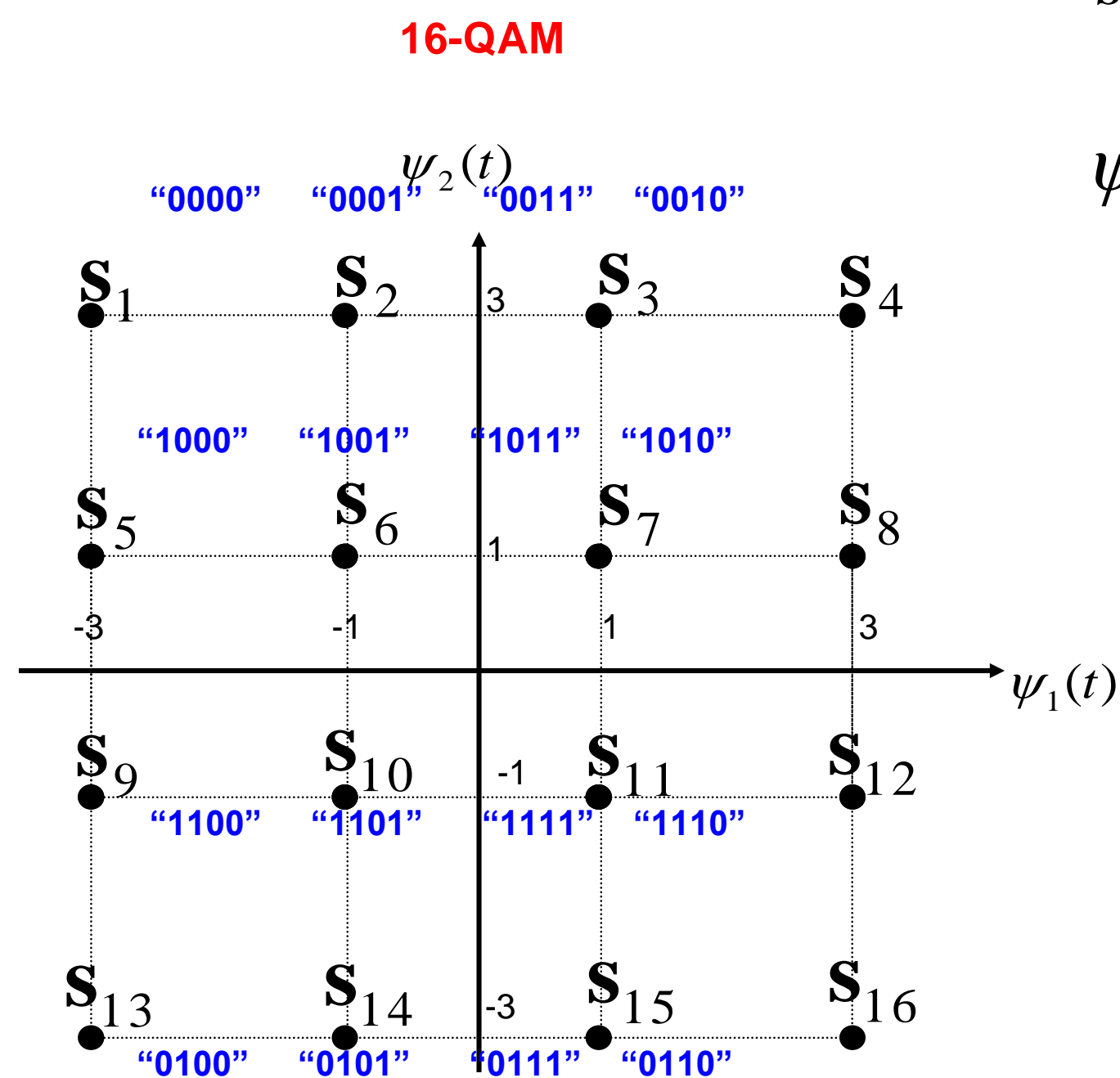
Sinyal QAM dapat dinyatakan sebagai fungsi linier dari 2 fungsi basis, sehingga dapat dinyatakan dengan

$$s_i(t) = a_{i1}\psi_1(t) + a_{i2}\psi_2(t) \quad i = 1, \dots, M$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_c t) \quad \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_c t)$$

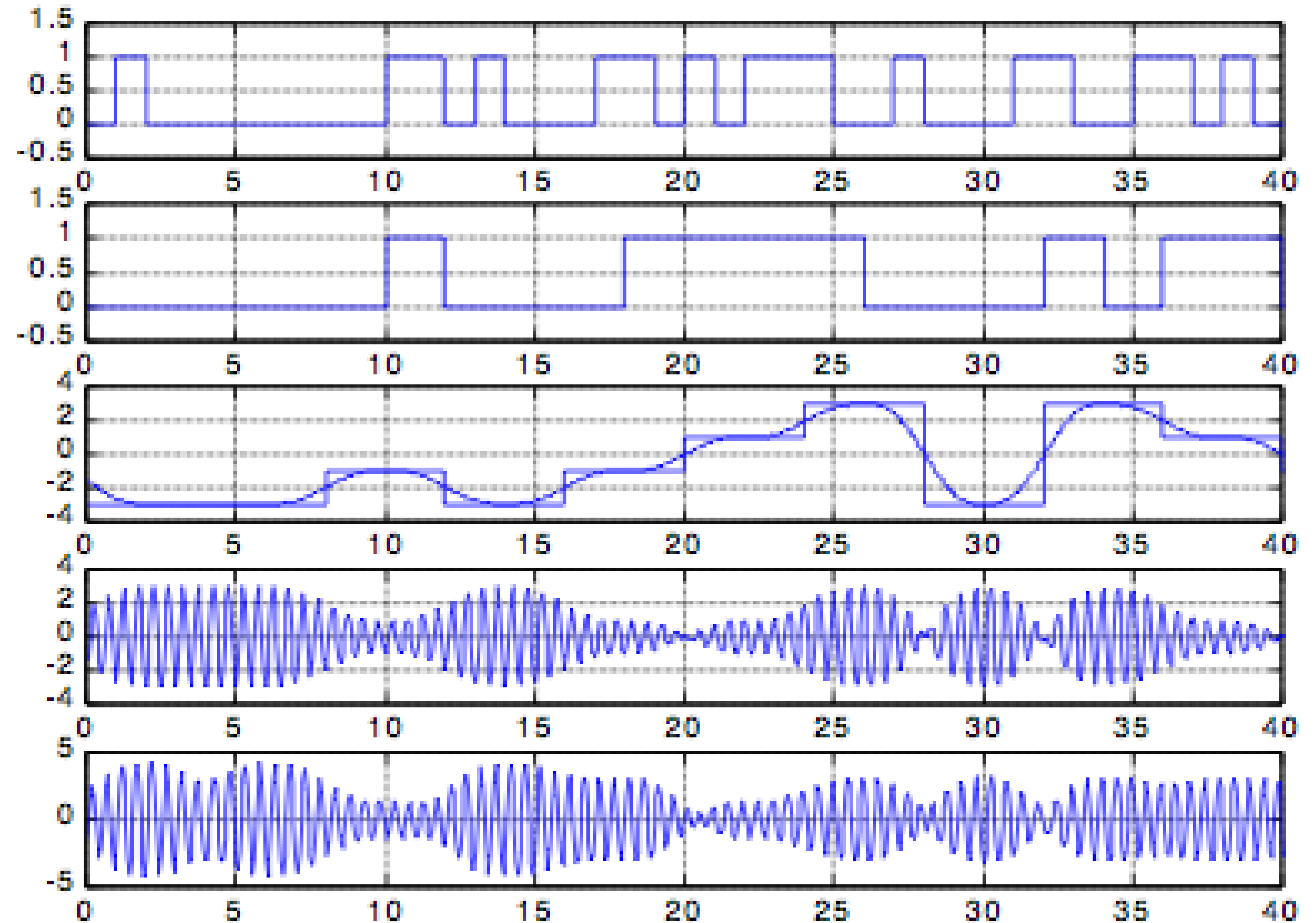
$\psi_1(t)$ dan $\psi_2(t)$ adalah fungsi basis

s_7 dan s_4 fasanya sama, tetapi berbeda amplituda
 s_6 dan s_7 amplitudanya sama, tetapi fasa berbeda



Sinyal QAM

- Sinyal Data
- Data in phase
- Sinyal QAM

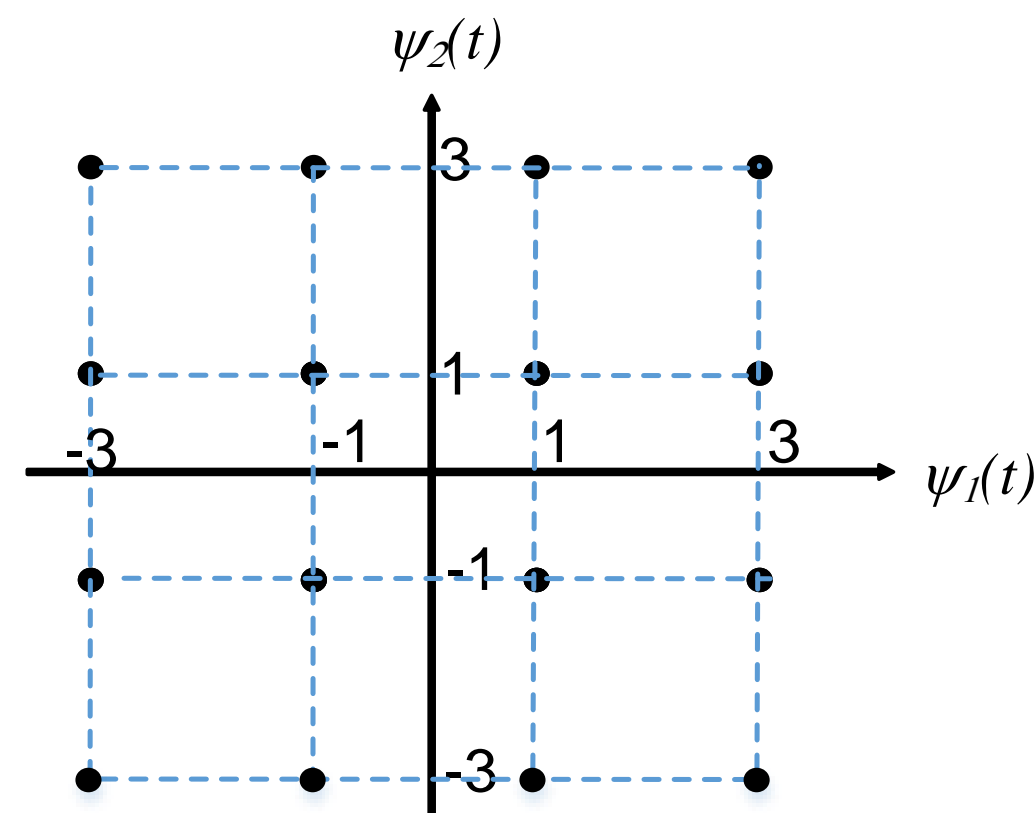


[Sorour Falahati, "Modulation, Demodulation and Coding Course, 2005]

Diagram Konstelasi QAM

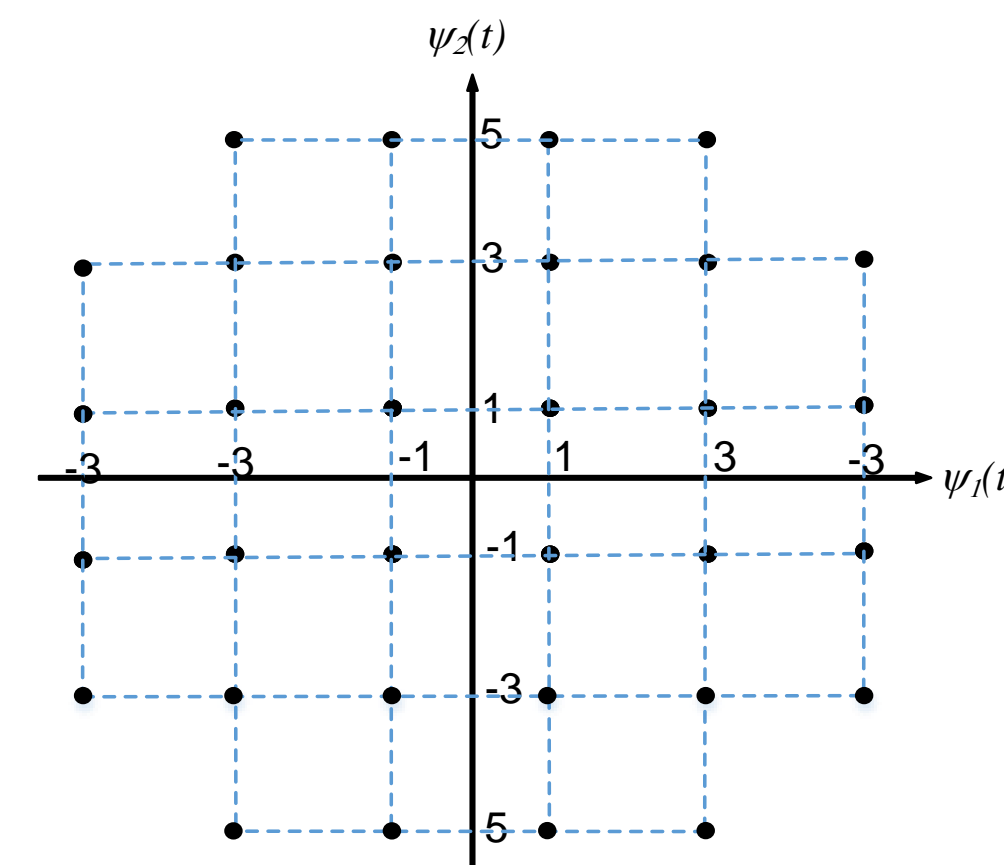
Berdasarkan jumlah kemungkinan M simbol, maka konstelasi QAM dibedakan menjadi konstelasi kotak (square constellation) dengan jumlah bit per simbolnya genap dan konstelasi silang (cross constellation) dengan jumlah bit per simbolnya ganjil.

16-QAM



Square Constellation
4 bit per simbol

32-QAM



Cross Constellation
5 bit per simbol

Square Constellation QAM

Dari persamaan M-QAM $s_i(t) = a_{i1}\psi_1(t) + a_{i2}\psi_2(t) \quad i = 1, \dots, M$

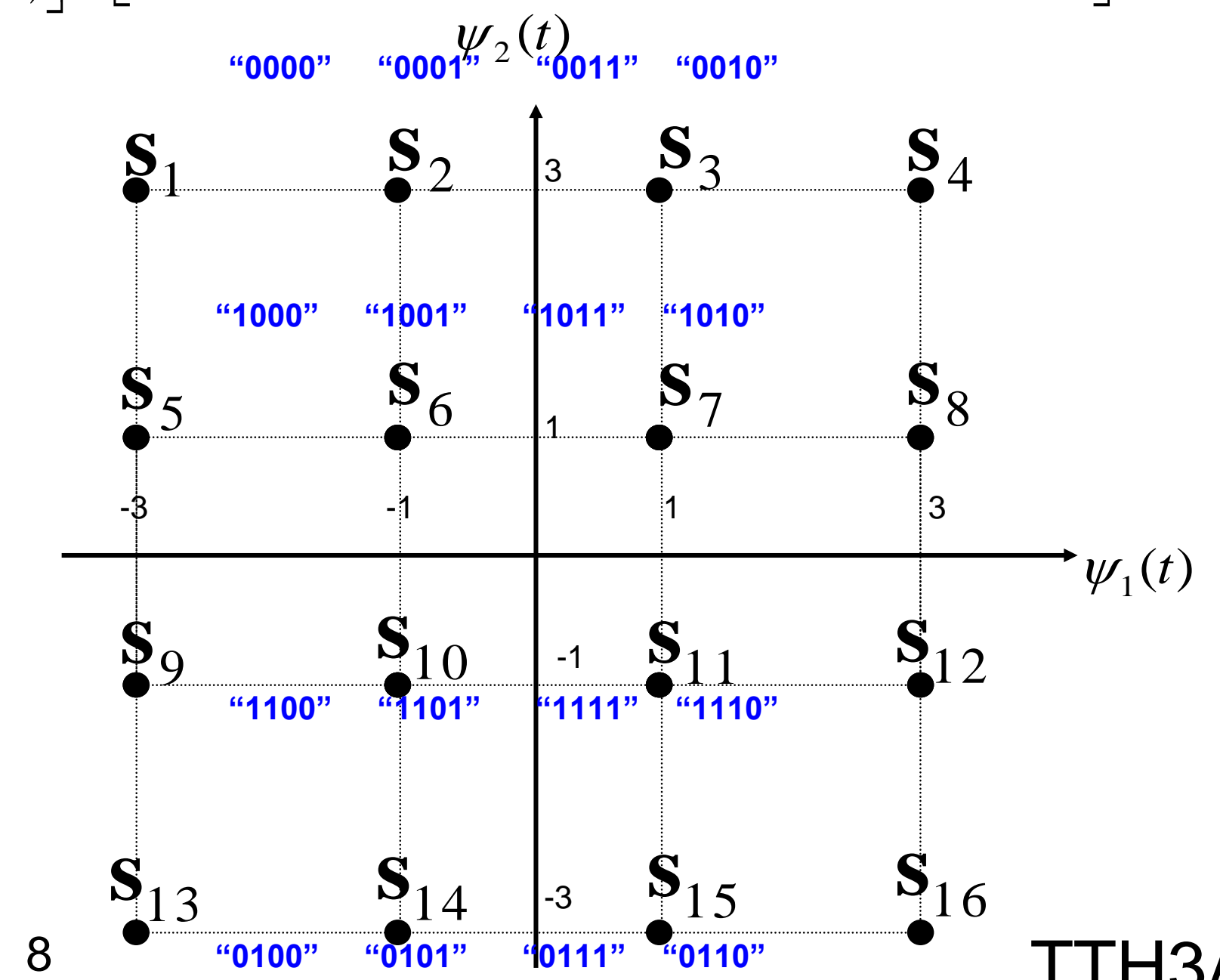
Dengan jumlah bit genap pada setiap simbolnya dimana: $L = \sqrt{M}$

Maka nilai a_{i1} dan a_{i2} adalah sebagai berikut :

$$(a_{i1}, a_{i2}) = \begin{bmatrix} (-\sqrt{M} + 1, \sqrt{M} - 1) & (-\sqrt{M} + 3, \sqrt{M} - 1) & \dots & (\sqrt{M} - 1, \sqrt{M} - 1) \\ (-\sqrt{M} + 1, \sqrt{M} - 3) & (-\sqrt{M} + 3, \sqrt{M} - 3) & \dots & (\sqrt{M} - 1, \sqrt{M} - 3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-\sqrt{M} + 1, -\sqrt{M} + 1) & (-\sqrt{M} + 3, -\sqrt{M} + 1) & \dots & (\sqrt{M} - 1, -\sqrt{M} + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-L+1, L-1) & (-L+3, L-1) & \dots & (L-1, L-1) \\ (-L+1, L-3) & (-L+3, L-3) & \dots & (L-1, L-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-L+1, -L+1) & (-L+3, -L+1) & \dots & (L-1, -L+1) \end{bmatrix}$$

Contoh : Untuk 16QAM $\rightarrow M=16 \rightarrow L=4$

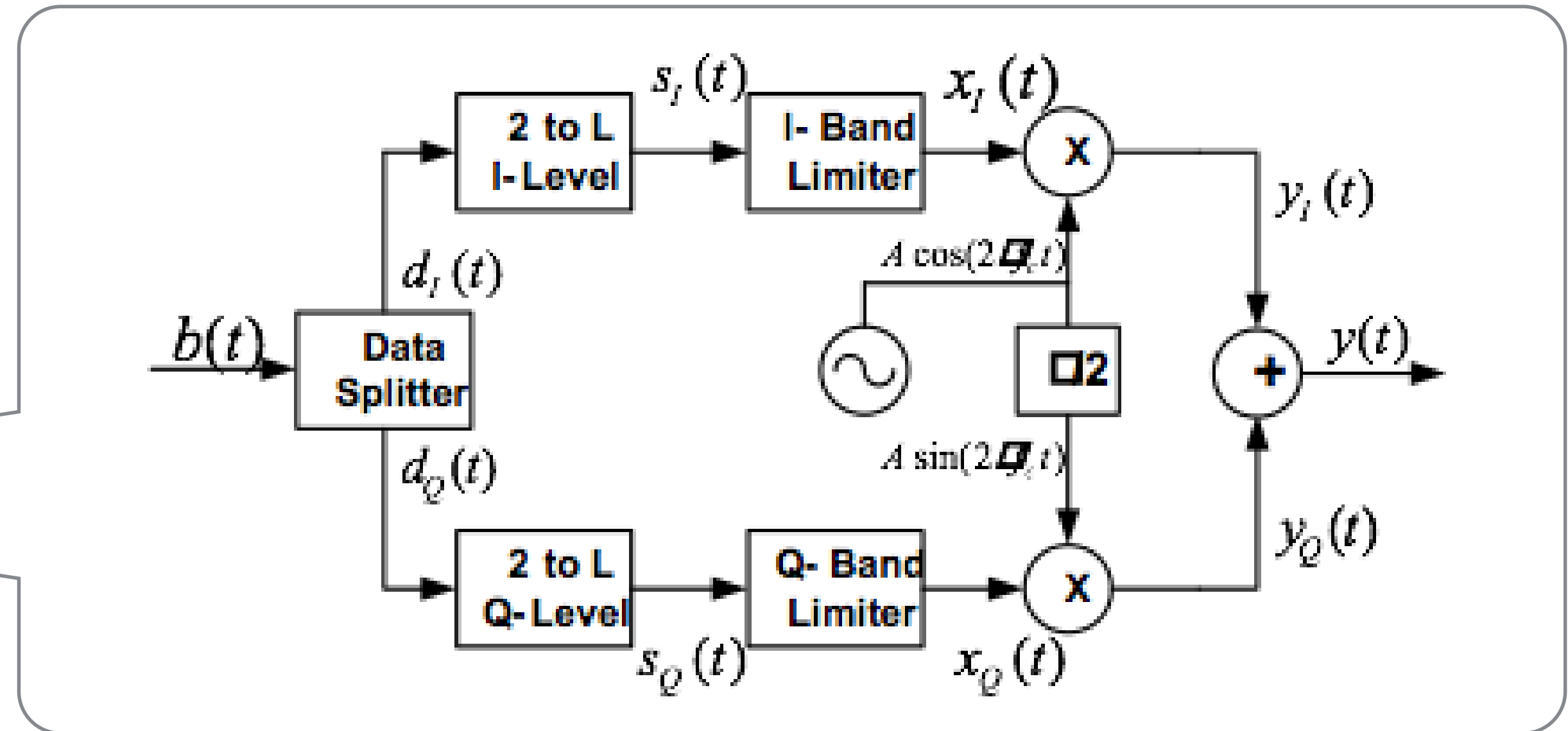
$$(a_{i1}, a_{i2}) = \begin{bmatrix} (-3, 3) & (-1, 3) & (1, 3) & (3, 3) \\ (-3, 1) & (-1, 1) & (1, 1) & (3, 1) \\ (-3, -1) & (-1, -1) & (1, -1) & (3, -1) \\ (-3, -3) & (-1, -3) & (1, -3) & (3, -3) \end{bmatrix}$$



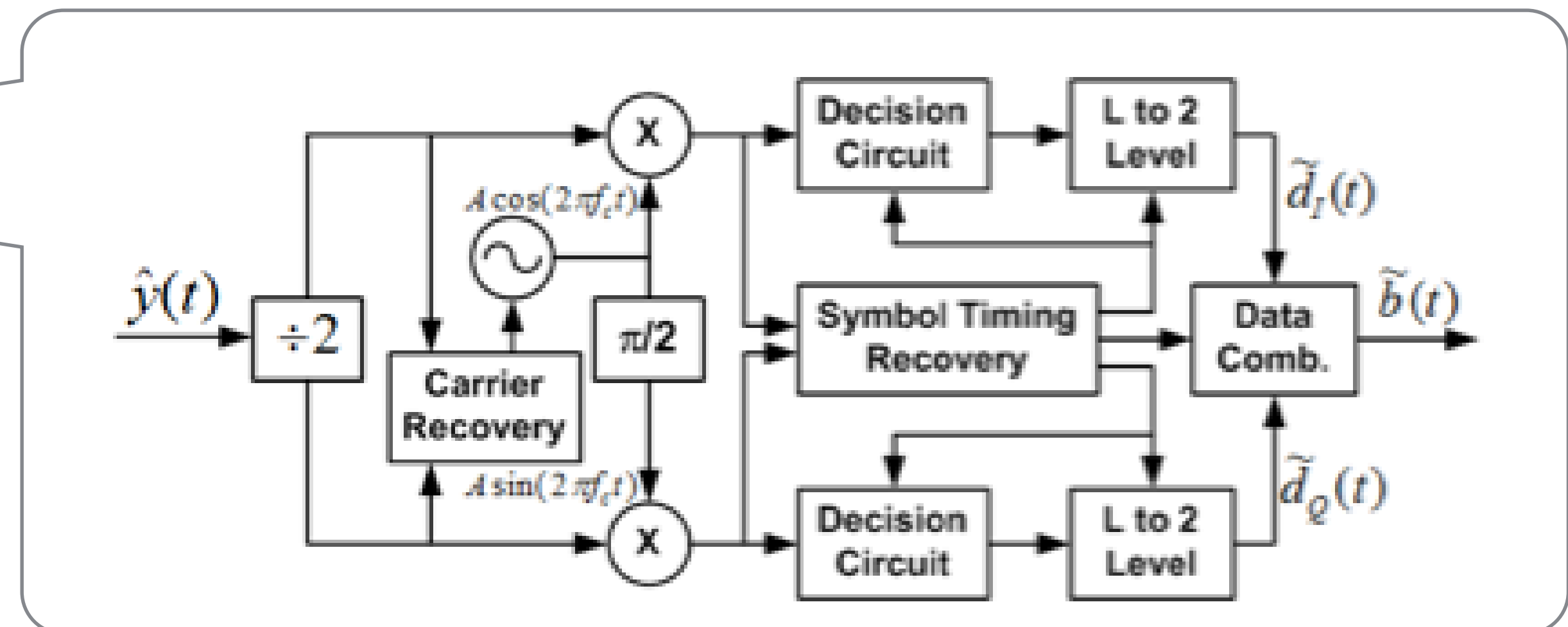
Modulator - Demodulator QAM

M-QAM, bisa dipandang sebagai kombinasi dari 2 buah kanal inphase dan quadrature (yang berbeda 90° ($\pi/2$)). Masing-masing kanal dapat dipandang sebagai modulasi M-PAM

- Blok Modulator

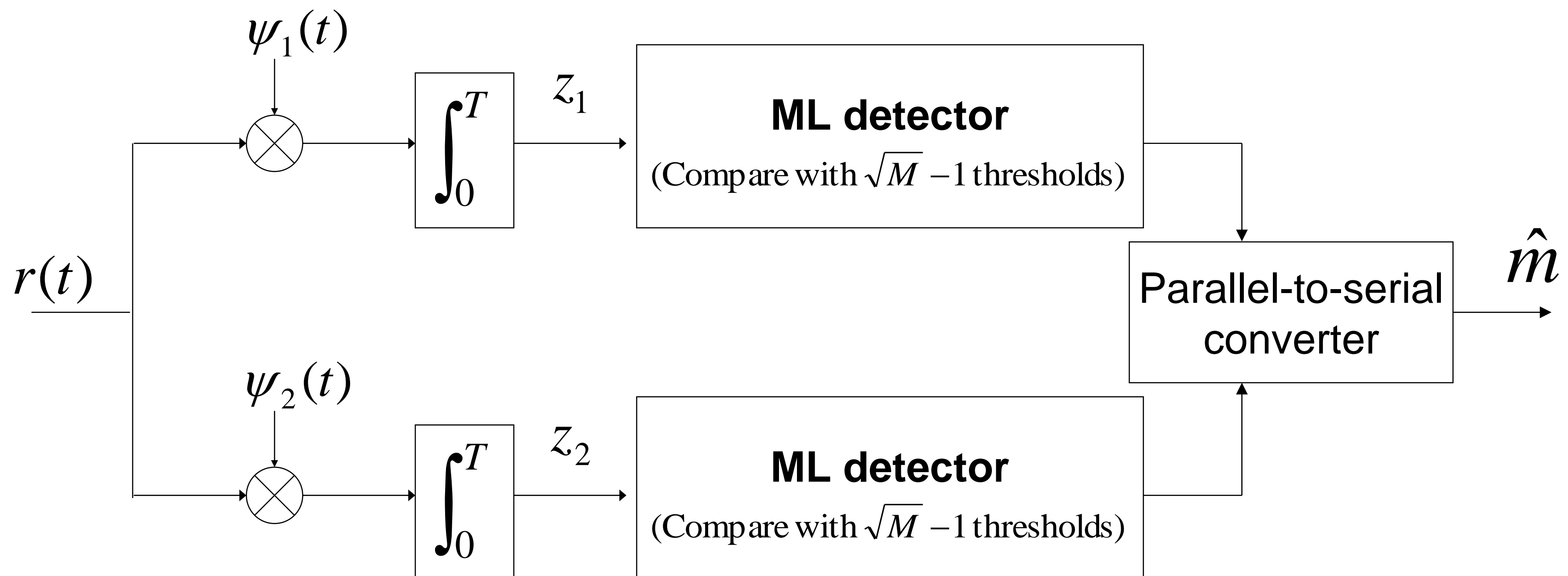


- Blok Demodulator



Coherent detection of M-QAM

- M-QAM, bisa dipandang sebagai kombinasi dari 2 buah sinyal M-PAM (sinyal inphase dan sinyal quadrature)
- Sinyal inphase dikalikan dengan fungsi basis $\psi_1(t)$ dan sinyal quadrature dikalikan dengan fungsi basis $\psi_2(t)$. Hasil integrasinya dibandingkan dengan threshold untuk kemudian diputuskan symbol mana yang dikirim (\hat{m})



Probabilitas Error M-QAM

- M-QAM, bisa dipandang sebagai kombinasi dari 2 buah sinyal M-PAM yang simetris dan orthogonal (kanal inphase dan quadrature).
- Jumlah symbol QAM adalah M, sehingga jumlah symbol untuk masing-masing kanal PAM adalah $L = \sqrt{M}$
- Probabilitas error $L - PAM$

$$P_E(L) = \frac{2(L-1)}{L} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 L}{L^2 - 1} \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{2(L-1)}{L} Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 L^2}{L^2 - 1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_E(\sqrt{M}) = \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 \sqrt{M}}{(\sqrt{M})^2 - 1} \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right)$$

Energi symbol rata-rata adalah untuk masing-masing L-PAM :

$$E_s = \frac{(L^2 - 1)}{3} E_0 = \frac{(M - 1)}{3} E_0$$

E_0 adalah energy symbol dengan amplitude terendah untuk masing-masing L-PAM.

Probabilitas Error M-QAM

- Simbol dikatakan benar bila tidak terjadi kesalahan baik pada inphase ataupun quadrature :

$$\Pr(\text{tidak error}) = \Pr(\text{tidak error pada I})\Pr(\text{tidak error pada Q})$$

$$= \Pr(\text{tidak error pada I})^2 = \left(1 - P_E(\sqrt{M})\right)^2 = \left(1 - 2P_E(\sqrt{M}) + P_E^2(\sqrt{M})\right)$$

- Dengan mengabaikan komponen kuadrat $P_E^2(\sqrt{M})$

- Maka

$$P_E(M) \approx 2P_E(\sqrt{M})$$

$$P_E(M) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right)$$

- Gabungan komponen I dan Q akan menghasilkan Energi rata-rata symbol M-QAM

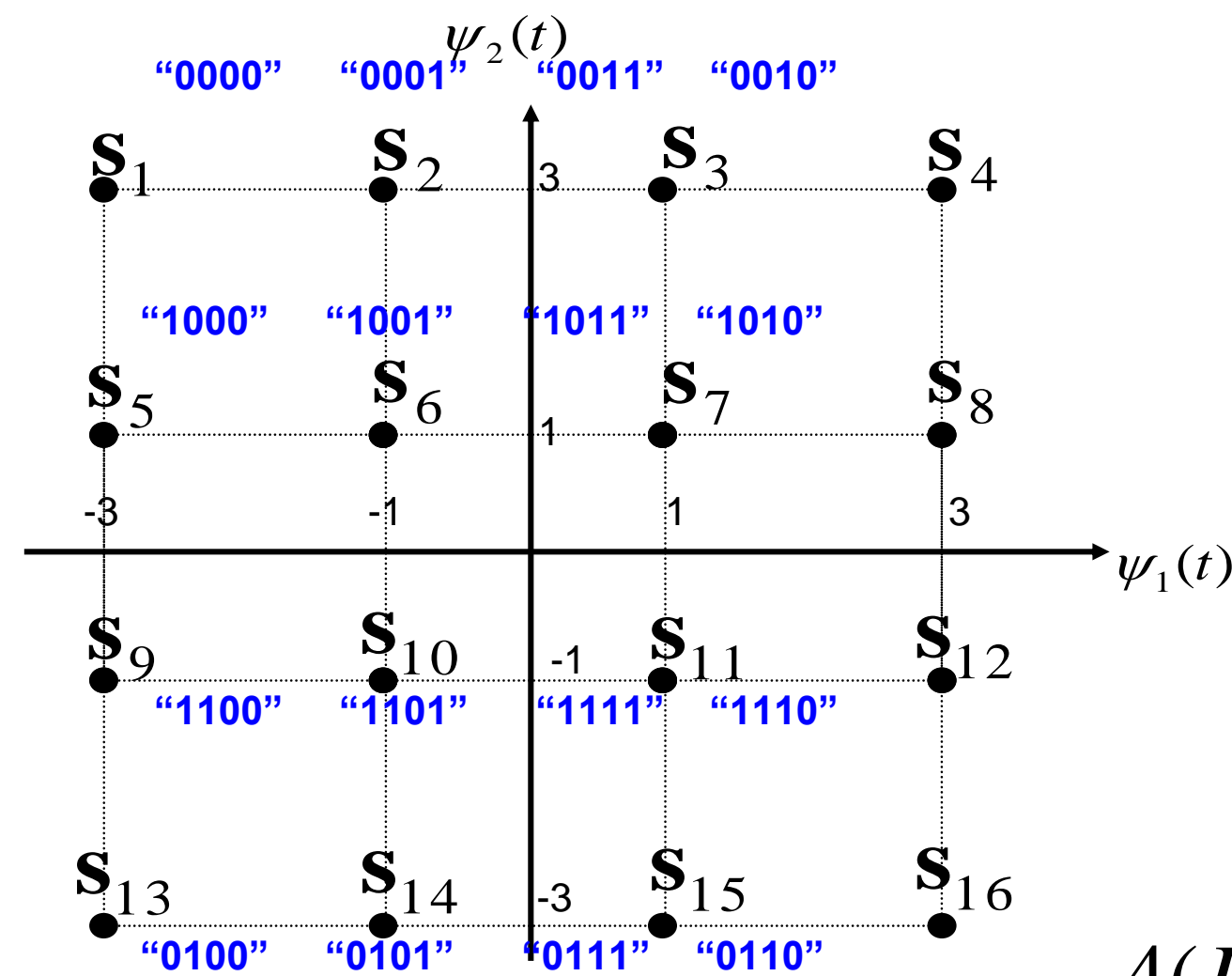
$$E_{avg} = \frac{2(M-1)}{3} E_0$$

- Sehingga

$$P_E(M) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3E_{avg}}{(M-1)N_0}}\right)$$

Probabilitas Error M-QAM (dengan Rumus Pe 2 simbol)

- Jarak antar 2 symbol terdekat = $2\sqrt{E_0}$
- Energi symbol rata-rata = $E_{avg} = \frac{2(M-1)}{3} E_0$



$$P_e = Q\left(\frac{\|s_1 - s_2\|/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2E_0}/2}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_0}{N_0}}\right)$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{3E_{avg}}{(M-1)N_0}}\right)$$

- Simbol yang mempunyai 4 symbol tetangga berjarak $\sqrt{E_0} = (L-2)^2$
- Simbol yang mempunyai 3 symbol tetangga berjarak $\sqrt{E_0} = 4(L-2)$
- Simbol yang mempunyai 2 symbol tetangga berjarak $\sqrt{E_0} = 4$
- Maka secara rata-rata :

$$\frac{4(L-2)^2 + 3 \times 4(L-2) + 2 \times 4}{M} = \frac{4L^2 - 16L + 16 + 12L - 24 + 8}{M} = \frac{4M - 4\sqrt{M}}{M} = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$$

- Maka Probabilitas error total

$$P_E(M) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3E_{avg}}{(M-1)N_0}}\right)$$

- Perhitungan dengan berbasis perhitungan probabilitas error untuk 2 simbol menghasilkan nilai yang sama dengan menggunakan pendekatan M-QAM sebagai kombinasi 2 L-PAM yang orthogonal

Frequency Shift Keying (FSK)

Definisi dan Persamaan FSK

- FSK, merupakan modulasi digital yang merepresentasikan suatu set sinyal atau simbol dengan variasi nilai frekuensi dari sinyal carriernya.
- FSK merupakan modulasi multi-dimensi → diagram konstelasi tidak bisa digambarkan dalam 2 dimensi saja
- Secara umum sinyal FSK dapat dinyatakan dengan:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(\omega_i t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(\omega_c t + (i-1)\Delta\omega t)$$

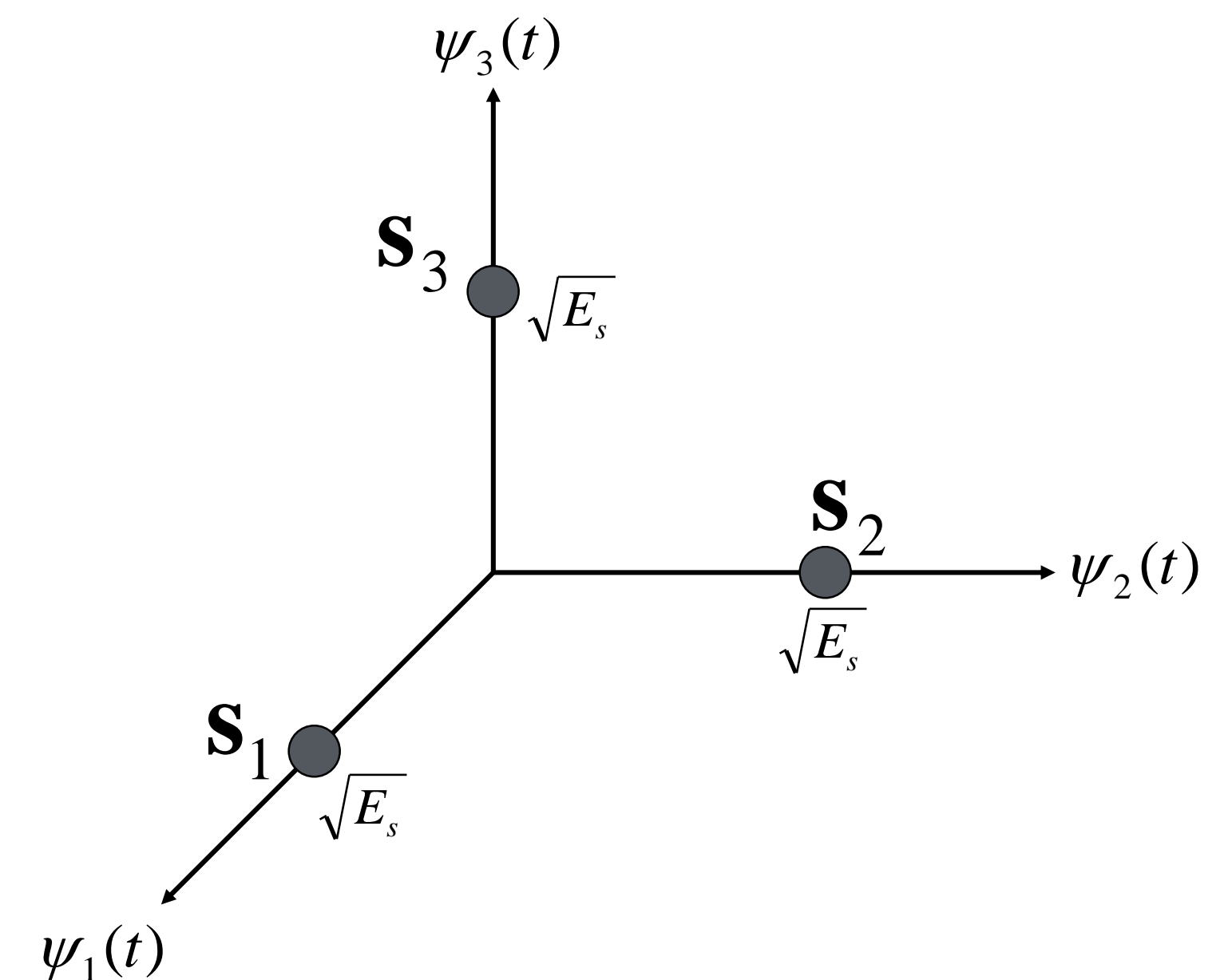
$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{2T} \quad \bullet \quad \omega_i = 2\pi f_i \text{ adalah komponen variabel}$$

- Jika dinyatakan dengan fungsi basis $\psi_i(t)$:

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^M a_{ij} \psi_j(t) \quad i = 1, \dots, M$$

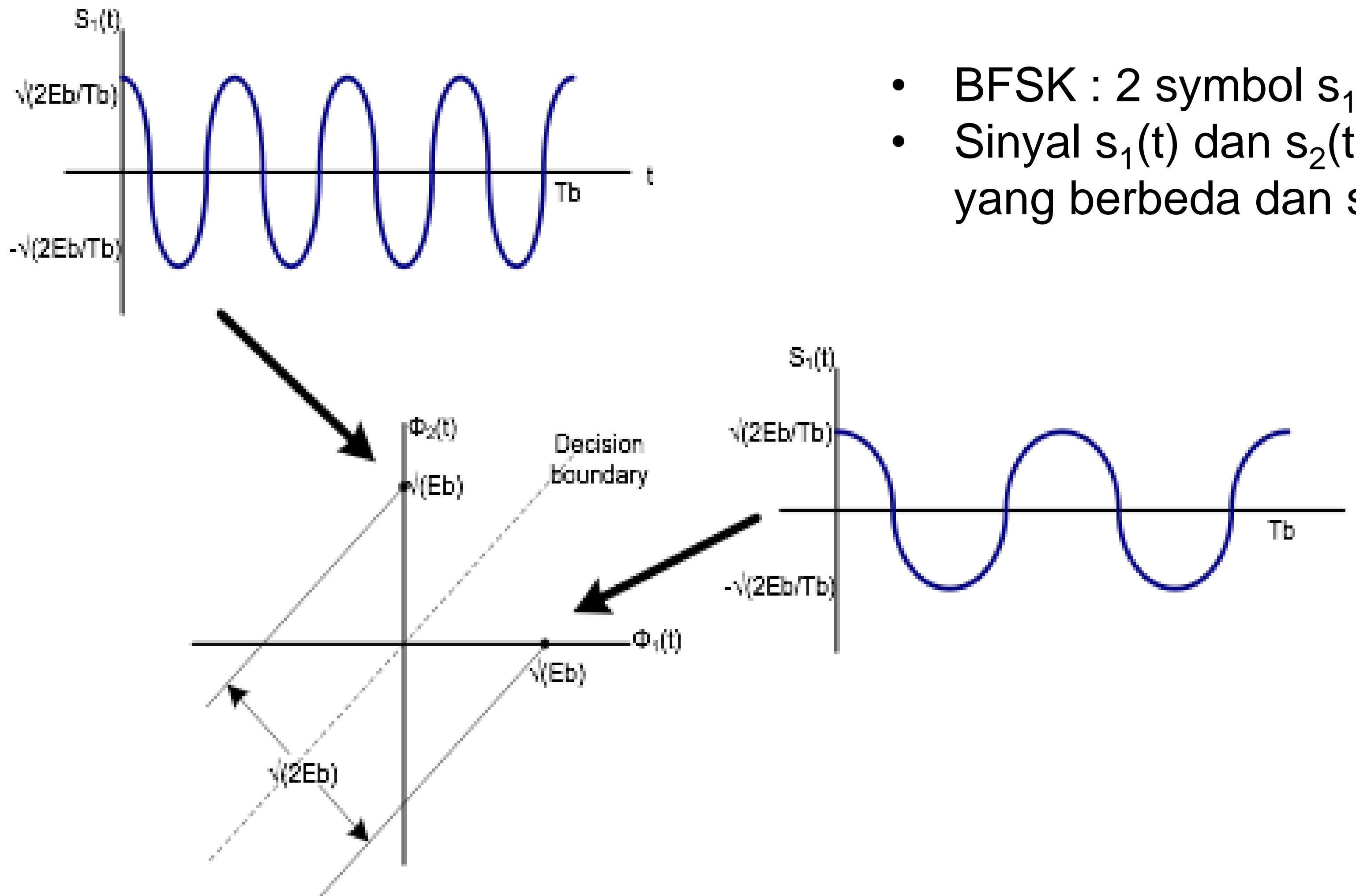
$$\psi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_i t) \quad a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{E_s} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$E_s = E_i = \|\mathbf{s}_i\|^2$$

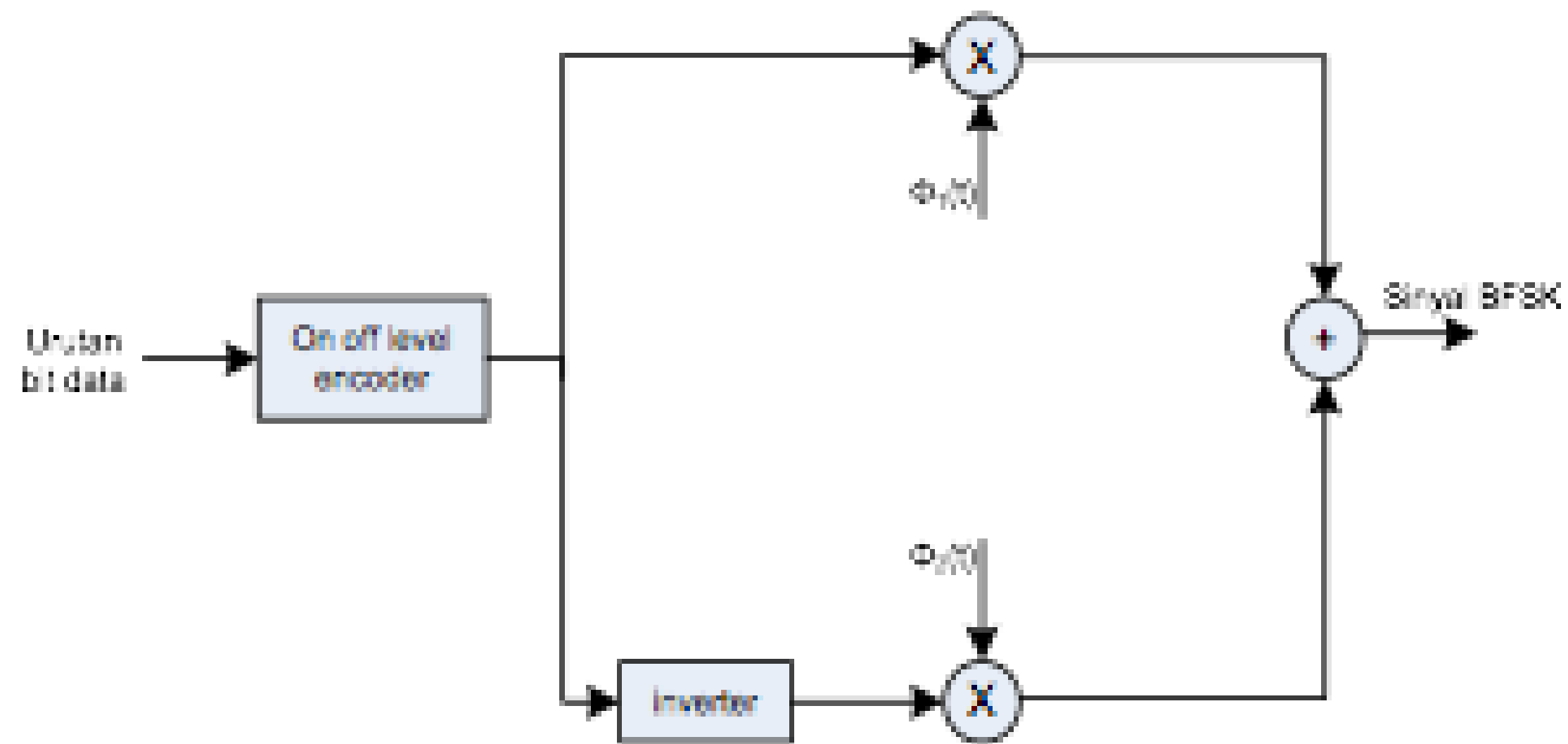


Sinyal BFSK

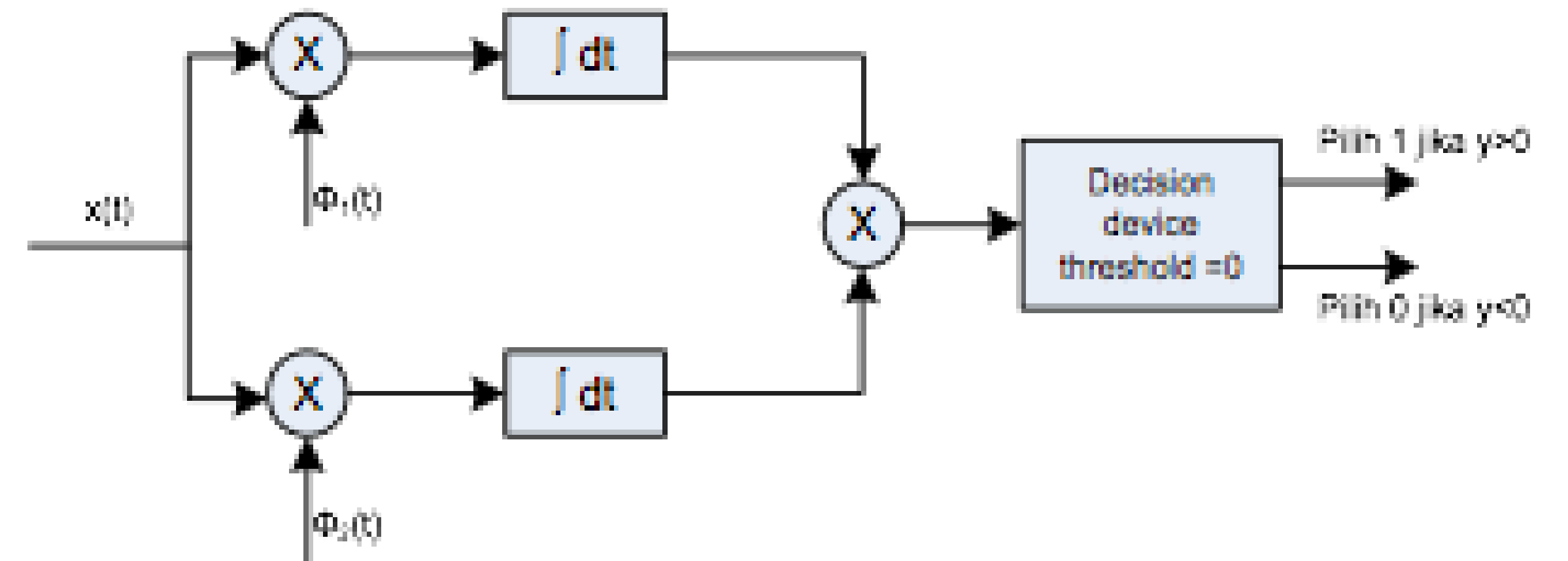
- BFSK : 2 symbol $s_1(t)$ dan $s_2(t)$
- Sinyal $s_1(t)$ dan $s_2(t)$ mempunyai frekuensi yang berbeda dan saling orthogonal



Blok Modulator & Demodulator BFSK



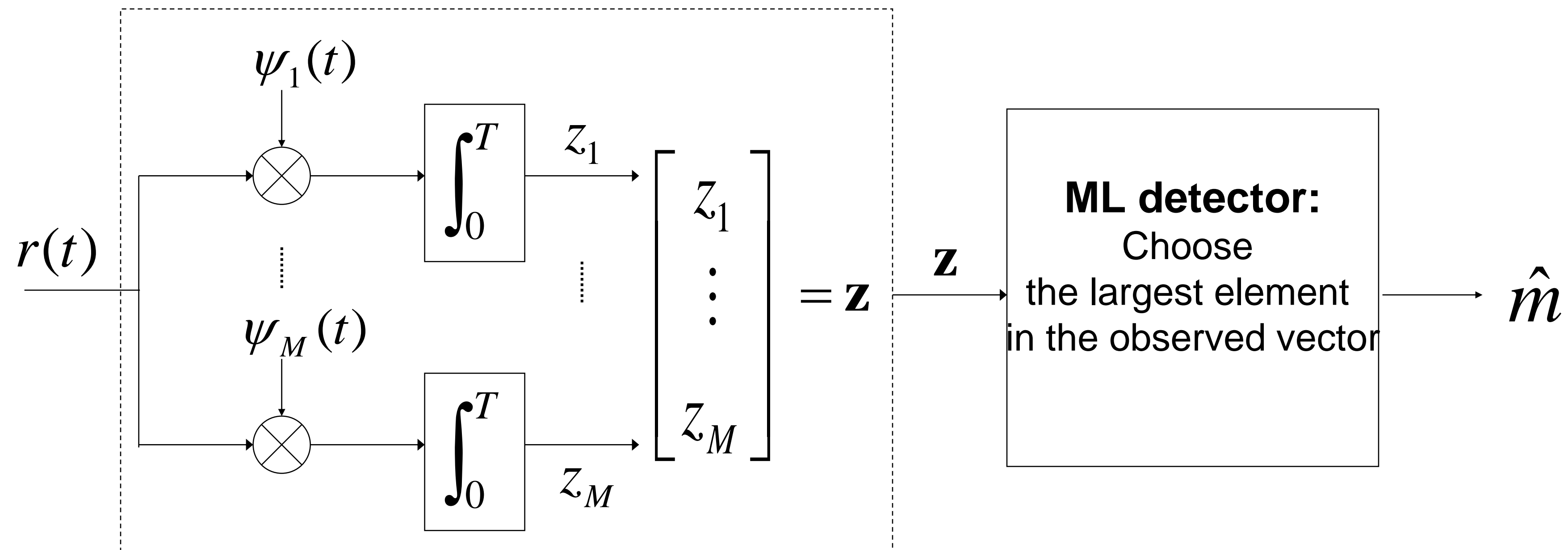
Blok Modulator



Blok Demodulator

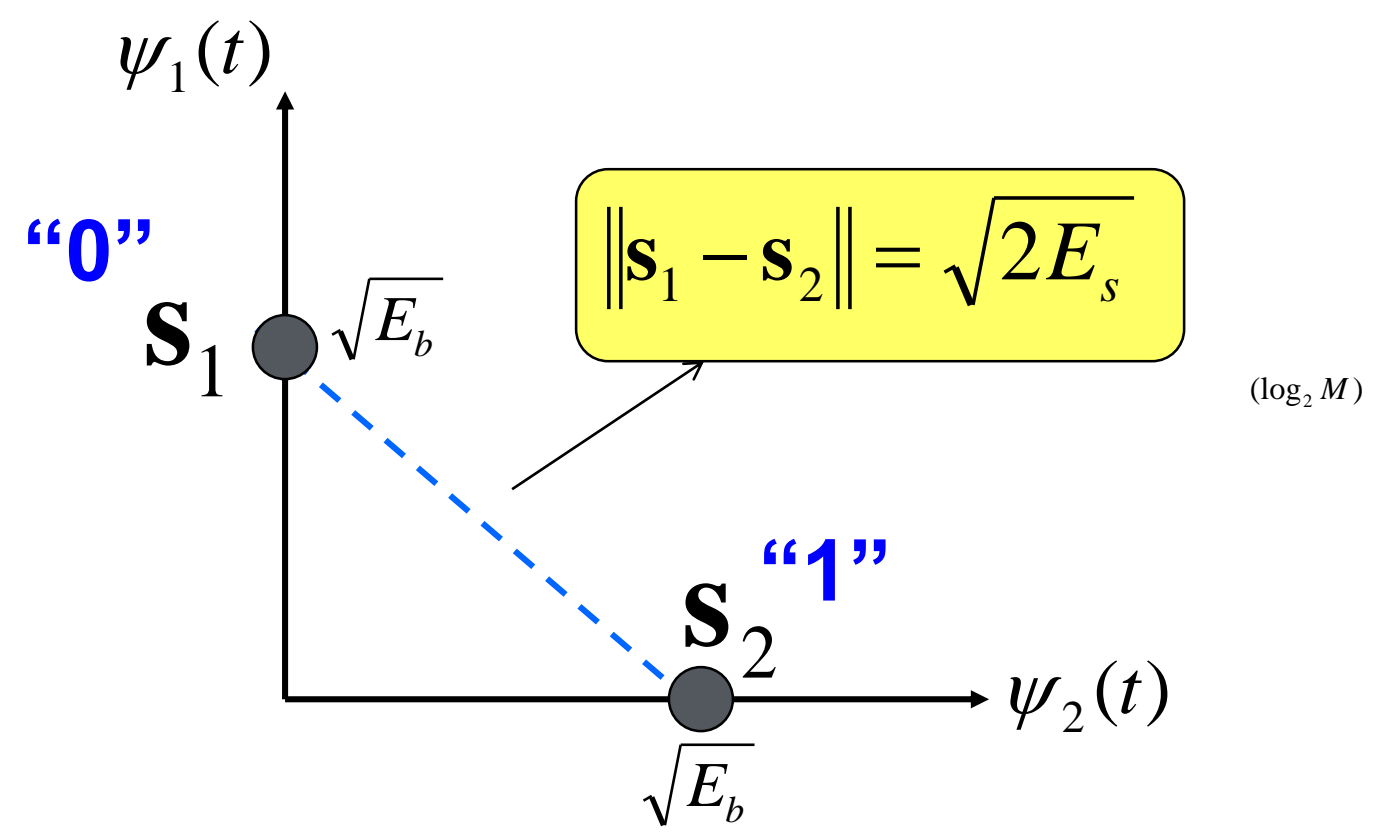
Deteksi Koheren M-FSK

- Deteksi koheren dengan menggunakan sinyal referensi fungsi basis $\psi_1(t) \dots \psi_M(t)$



Probabilitas Error BFSK

- Sesuai rumus probabilitas error 2 simbol $P_e = Q\left(\frac{\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\| / 2}{\sqrt{N_0 / 2}}\right)$
- Untuk sinyal BFSK yang frekuensinya saling orthogonal :



$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

E_b = Energi per bit

E_s = Energi per simbol:

Probabilitas Error M-FSK

Apabila terdapat M symbol dan jaraknya dianggap sama antar setiap 2 symbol adalah $\sqrt{2E_s}$

Terdapat kemungkinan $M-1$ symbol error. Maka Probabilitas error yang terjadi adalah :

$$P_e = (M - 1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M - 1)Q\left(\sqrt{\frac{(\log_2 M)E_b}{N_0}}\right)$$

Tetapi jarak antar 2 symbol sebagian besar kurang dari $\sqrt{2E_s}$, sehingga untuk M-FSK:

$$P_e < (M - 1)Q\left(\sqrt{\frac{(\log_2 M)E_b}{N_0}}\right)$$

E_b = Energi per bit

E_s = Energi per symbol

M = Jumlah symbol

$(\log_2 M)$ = jumlah bit per simbol

Terima kasih
dan selamat belajar.