



PROBABILITAS ERROR

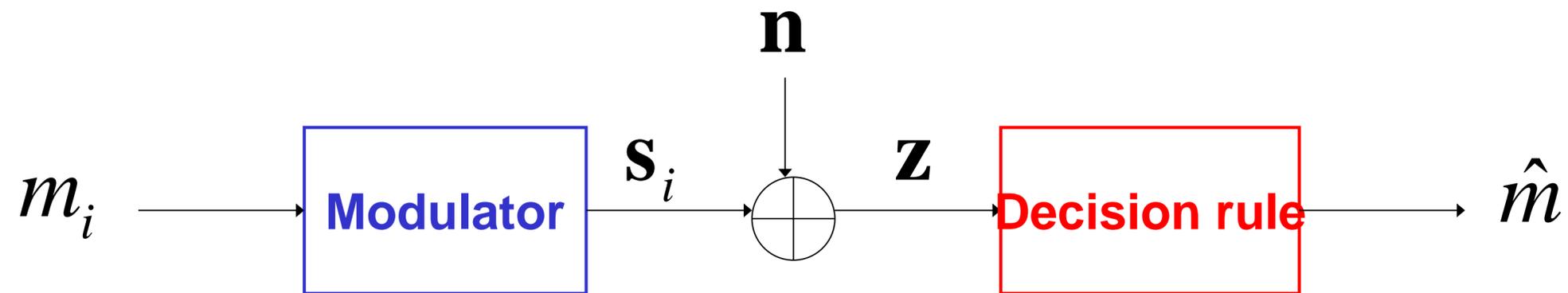
Tujuan Pembelajaran

- Memahami dan menjelaskan konsep Probabilitas Error
- Mampu menghitung probabilitas error pada kanal AWGN dengan menggunakan table fungsi Q

- Pendahuluan
- Teorema Bayes
- Kanal AWGN
- Fungsi Likelihood
- MAP detection
- ML detection
- Probabilitas Error

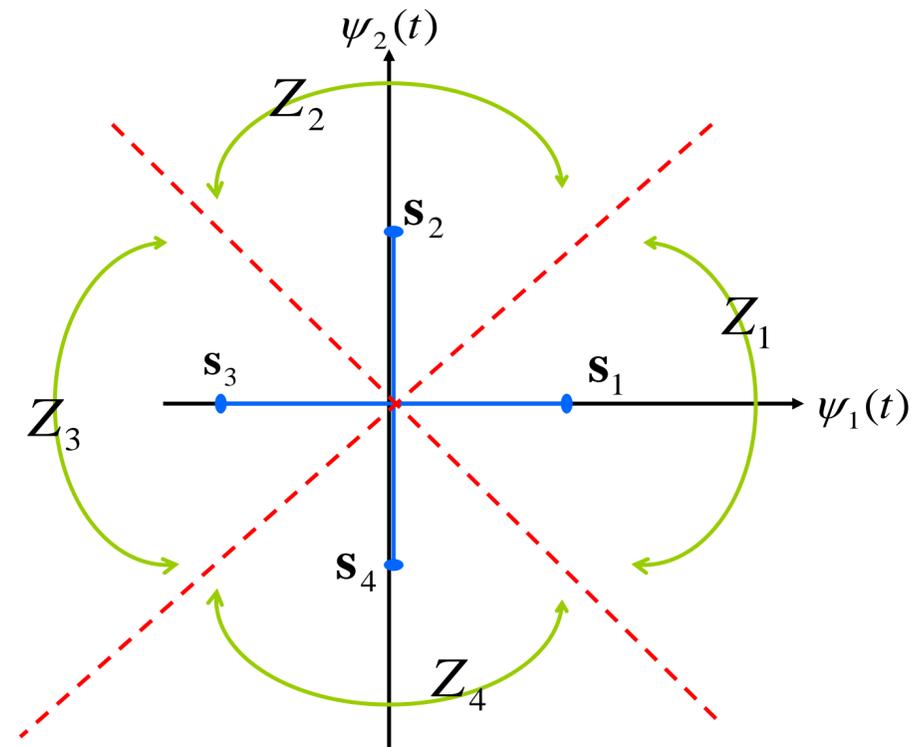
Deteksi sinyal pada kanal AWGN

- m_i dimodulasi menghasilkan symbol s_i dan dikirim melalui kanal AWGN (mendapatkan noise).
- Diterima sebagai z dan harus diputuskan symbol mana yang diterima tersebut untuk kemudian didemodulasi menjadi bit m



$$\mathbf{z} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$$

- Jika dikirim bit 1 dan diterima sebagai bit 0, maka disebut error demikian juga sebaliknya.
- Apabila sudah dimodulasi, jika dikirim S1 tetapi diterima sebagai S2 atau S3 atau yang lain (tergantung jatuh di daerah keputusan z), maka disebut error
- Probabilitas error adalah kemungkinan terjadinya error
- Semakin kecil probabilitas error, maka system semakin baik
- Probabilitas error = 10^{-6} artinya : apabila dikirim 10^6 symbol, maka kemungkinan terjadi error secara rata-rata adalah sebesar 1 simbol



- Error akan terjadi apabila untuk sinyal m_i (atau vector sinyal/ symbol s_i) yang dikirim, vector sinyal yang diterima tidak masuk di dalam daerah symbol yang dikirim tersebut (Z_i)..
- Probabilitas error yang terjadi :

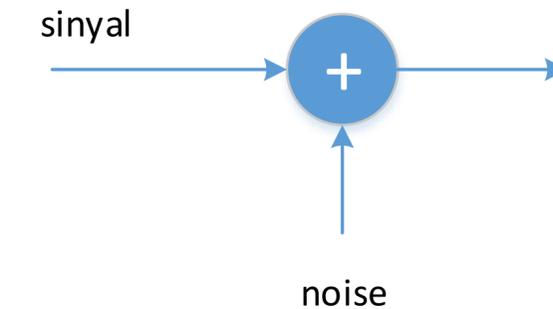
$$P_e(m_i) = \Pr(\hat{m} \neq m_i \text{ saat } m_i \text{ dikirim})$$

$$\Pr(\hat{m} \neq m_i) = \Pr(m_i \text{ dikirim})\Pr(\mathbf{z} \text{ tidak terletak di dalam } Z_i | m_i \text{ dikirim})$$

AWGN (Additive White Gaussian Noise)

- **Additif :**

sinyal noise akan bersifat dijumlahkan dengan sinyal informasi



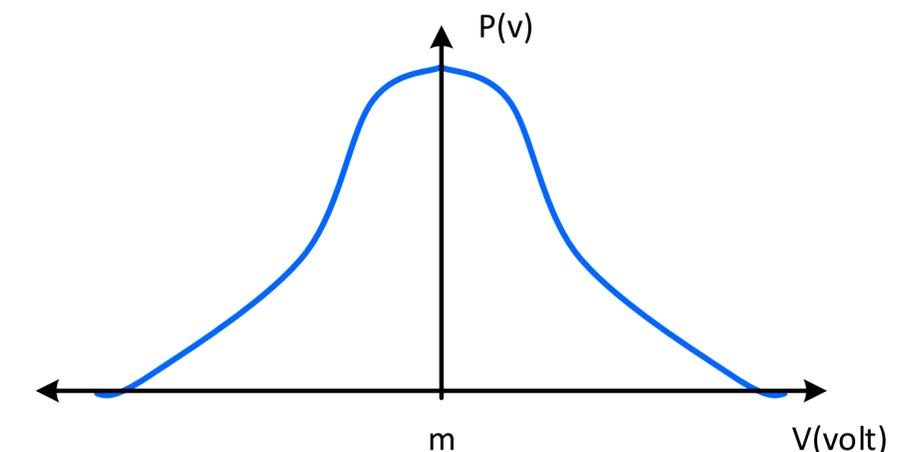
- **White :**

- Rapat spectral daya noise sama untuk keseluruhan daerah frekuensi



- **Gaussian**

- Pdf (probability density function) mengikuti distribusi gaussian
- Sumbu horizontal menunjukkan nilai tegangan noise $v(t)$ yang kemungkinan muncul
- Sumbu vertical menunjukkan nilai probabilitas kemunculan $p(v)$
- Luas seluruh kurva menunjukkan nilai probabilitas kumulatif total = 1



Model Kanal AWGN

$$\mathbf{z} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$$

- Vektor sinyal $\mathbf{s}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$ bersifat deterministic.
- Elemen vector noise $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ adalah variable acak Gaussian dengan rata-rata nol (zero-mean) dan variansi $N_0/2$
- Pdf (probability density function) dari vector noise (Gaussian) adalah

$$p_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{N_0}\right)$$

- Vektor sinyal yang diterima $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ merupakan variable acak Gaussian dengan pdf

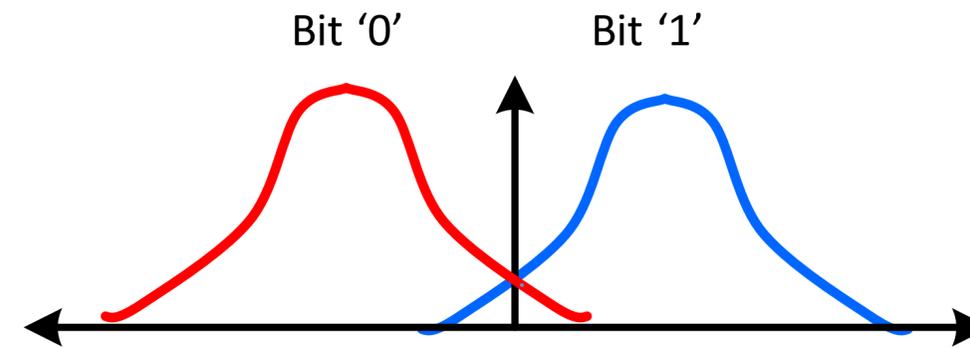
$$p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z} | \mathbf{s}_i) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0}\right)$$

Sifat additive



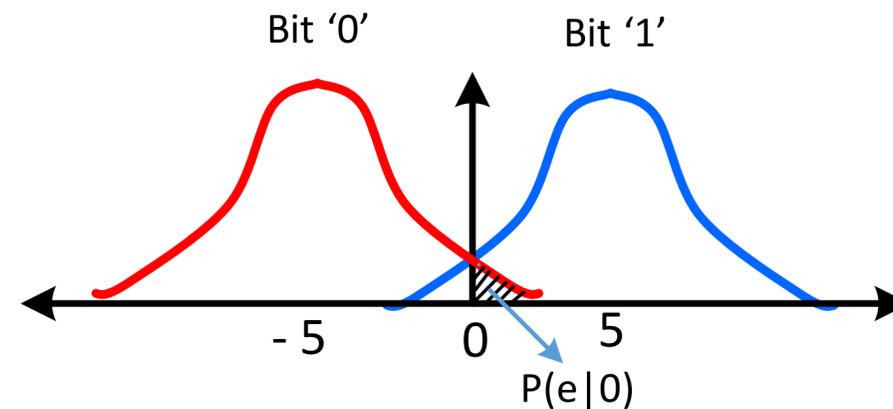
- Bit 1 direpresentasikan sebagai tegangan 5 volt merupakan sinyal deterministic. Ketika di kanal mendapatkan noise yang merupakan sinyal probabilistic dengan nilai mean (rata-rata) = 0, maka hasilnya adalah sinyal probabilistic dengan nilai mean = 5 volt
- Bit 0 direpresentasikan sebagai tegangan -5 volt merupakan sinyal deterministic. Ketika di kanal mendapatkan noise yang merupakan sinyal probabilistic dengan nilai mean (rata-rata) = 0, maka hasilnya adalah sinyal probabilistic dengan nilai mean = -5 volt

Probabilitas Error berdasar kurva Gaussian



- Bit yang dikirim bisa bit '1' atau bit '0'.
- Dalam gambar di atas tegangan threshold adalah tegangan 0 volt, artinya jika yang diterima $V > 0$, maka dianggap bit 1 dan jika $V < 0$ dianggap bit 0
- Ketika dikirim bit 0, ada bagian dari distribusi Gaussian yang melewati threshold ($V > 0$). Jika ini terjadi maka akan terjadi error, karena yang dikirim adalah bit 0, tetapi di penerima dianggap bit 1.

Probabilitas Error berdasar kurva Gaussian



- Probabilitas error jika dikirim 0 tetapi diterima sebagai bit 1 tersebut adalah luas kurva merah yang melewati threshold 0 sampai tak terhingga (yang diarsir) dimana $V > 0$:

$$P(e|0) = \int_0^{\infty} p(v)dv$$

- Demikian juga probabilitas error jika dikirim bit 1 tetapi diterima sebagai bit 0 adalah luas kurva biru yang $V < 0$:

$$P(e|1) = \int_{-\infty}^0 p(v)dv$$

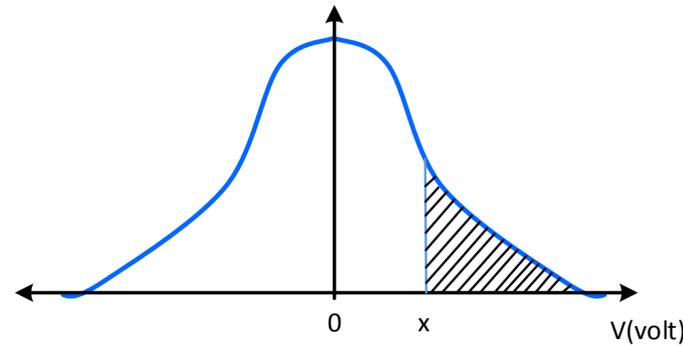
- Jika dirata-rata Probabilitas error total :

$$P_e = P(e|0)p\{0\} + P(e|1)p(1)$$

di mana $p(0)$ adalah probabilitas kemunculan bit 0 dan $p(1)$ adalah probabilitas kemunculan bit 1.

- Jika $p(0) = p(1)$, maka $P_e = p(e|0) = p(e|1)$

Tabel of Complementary Error Function Q(x)



- luas kurva yang diarsir (yang mencerminkan probabilitas error) :

$$P(e|0) = \int_x^{\infty} p(v)dv$$

Tidak dapat dihitung dengan menggunakan integral.

- Untuk itu luas daerah daerah tersebut ditabelkan berdasar batas x. Tabel tersebut adalah table fungsi Q.

- Contoh pembacaan :

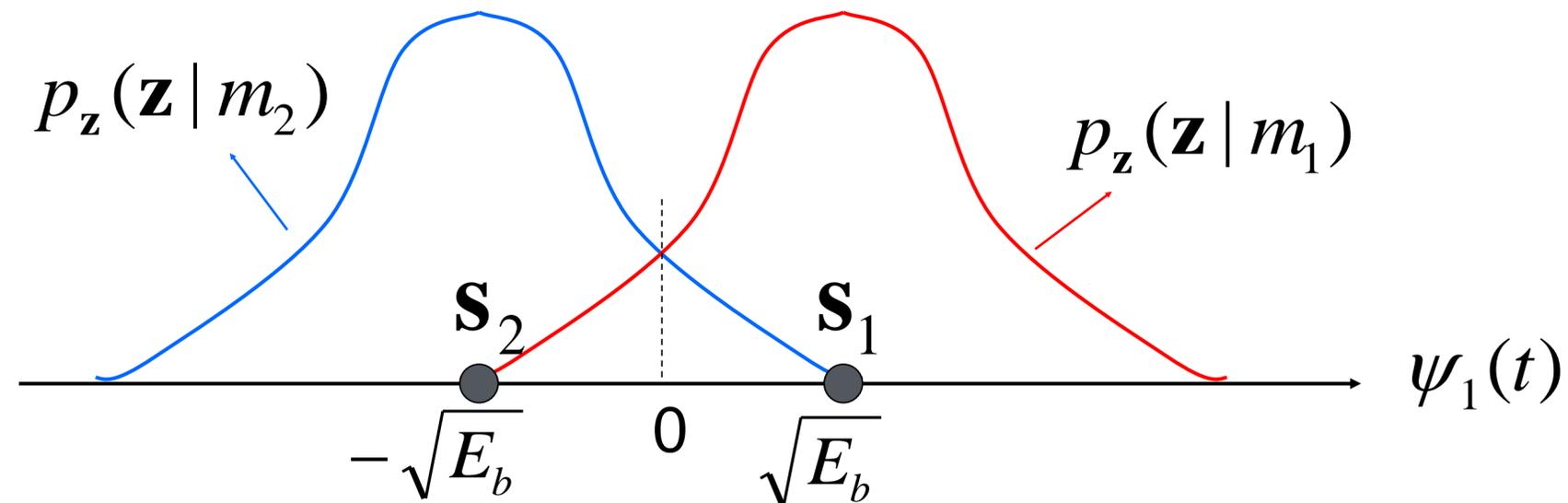
Dapat dilihat untuk $x=0.00$, maka luas daerah adalah 0.5 (setengah kurva)

untuk nilai batas kiri $x = 0.92$, maka didapat luas daerah yang diarsir (probabilitas error) = 0.1788

Table of Complementary Error Function $Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$

	Q(x)									
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2168	0.2148
0.8	0.2169	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379

Rumus Penentuan Prob. Error untuk Sinyal Biner



$$P_e(m_1) = P_e(m_2) = Q\left(\frac{\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$P_B = P_E(2) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Probabilitas Error Rata-rata

- Apabila symbol sebanyak M , maka probabilitas error harus dihitung tiap symbol, kemudian dirata-ratakan :

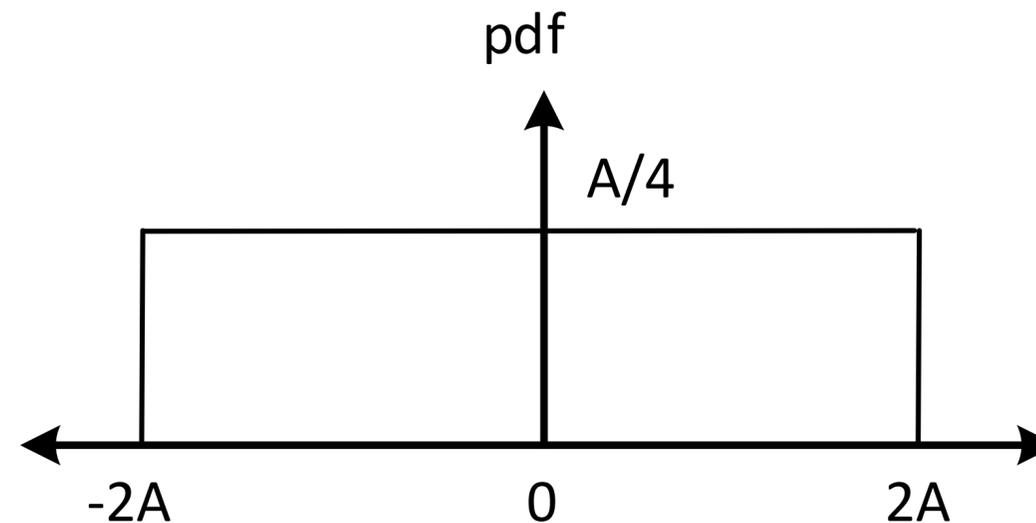
$$P_E(M) = \sum_{i=1}^M \Pr(\hat{m} \neq m_i)$$

- Untuk symbol yang mempunyai probabilitas kemunculan yang sama:

$$P_E(M) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_e(m_i)$$

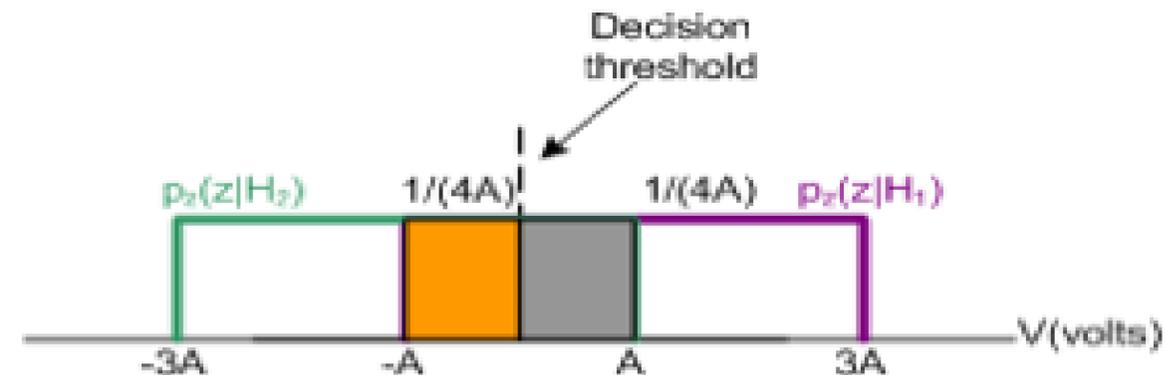
Probabilitas Error untuk Non Gaussian

- Tabel fungsi Q hanya berlaku untuk pdf noise Gaussian.
- Apabila pdf noise bukan Gaussian, prinsip penghitungan adalah dengan menghitung luas area yang memberikan probabilitas error.
- Di sini diambil contoh pdf noise uniform (dari $-2A$ sampai $2A$) dan peluang kemunculan simbol s_1 dan s_2 sama $P(s_1) = P(s_2) = 0.5$. Perhatikan besar (amplitude) probabilitas tersebut adalah $A/4$ karena luas total pdf tersebut harus = 1.



Probabilitas Error untuk Non Gaussian

- Apabila dikirim symbol 1 = A dan symbol 2 = -A, maka pdf gabungan yang terjadi adalah sebagai berikut



- Dari gambar terlihat, kesalahan deteksi untuk simbol s_1 terjadi pada saat simbol yang diterima berada di daerah sebelah kiri nilai threshold (diarsir jingga) sedangkan kesalahan deteksi simbol s_2 terjadi pada saat simbol yang diterima berada pada daerah sebelah kanan nilai threshold (diarsir abu)
- Probabilitas error adalah luas area tersebut :

$$P(e|s_1) = A \times (A/4) = A^2/4$$

$$P(e|s_2) = A \times (A/4) = A^2/4$$

- Sehingga probabilitas error rata-rata =

$$P_e = P(e|s_1) p(s_1) + p(e|s_2) p(s_2) = A^2/4 \times 0.5 + A^2/4 \times 0.5 = A^2/4$$

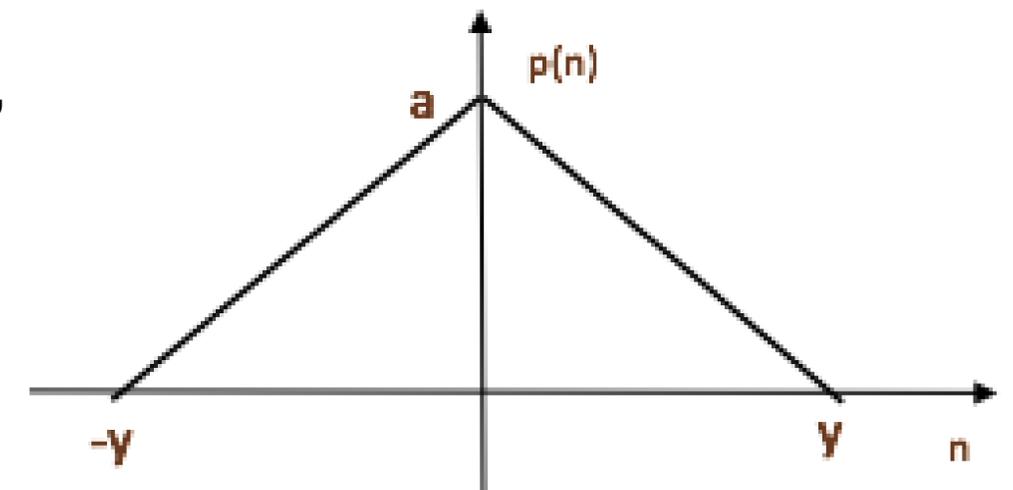
Sebuah sistem komunikasi digital biner dengan deteksi menggunakan Maximum Likelihood (ML) detektor. Sinyal yang ditransmisikan adalah sebagai berikut :

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = +x \text{ volt} & 0 \leq t \leq T \text{ "1"} \\ s_2(t) = -x \text{ volt} & 0 \leq t \leq T \text{ "0"} \end{cases}$$

Bit informasi bersifat equiprobable. Selama transmisi sinyal melewati kanal ideal kemudian bercampur dengan Noise $n(t)$ berkarakteristik 'white' dengan Power Spectral Density N_0 (single side) dan probability density function (bersifat stasioner) sbb:

Bandwidth noise ekivalen LPF sebelum detector = B_N dan semua system bekerja pada beban 1.

- Cari daya rata-rata sinyal dan energi bit rata-rata sebagai fungsi dari x , kemudian cari juga daya rata-rata noise dan rapat daya noise sebagai fungsi dari y !
- Hitung probability of bit error, P_e sebagai fungsi dari x dan y !



Terima kasih
dan selamat belajar.