Telkom University

TEORI INFORMASI

TTI3J3 SISTEM KOMUNIKASI II

TUJUAN PEMBELAJARAN

- Mahasiswa mampu memahami dasar teori informasi dengan menghitung kandungan informasi dan entropi, melakukan pengkodean sumber berupa Shannon-Fano Code dan Huffman Code serta menentukan mutual information, kapasitas kanal dan batas Shannon

OUTLINE

- Pendahuluan
- Kandungan Informasi
- Entropi
- Source Encoding
- Panjang dan Efisiensi Source Coding
- Huffman Coding
- DMC
- Mutual Informasi
- Kapasitas kanal

SEJARAH

Claude Elwood Shannon (April 30, 1916 – February 24, 2001)

Dikenal sebagai " The Father of Information Theory", tahun 1948 ia mengeluarkan paper "A Mathematical Theory of Communication" yang dikenal sebagai "Information Theory"

Shannon memodelkan sistem komunikasi dengan:

- Sender (sumber Informasi)
- Transmission Medium (dengan tambahan noise dan distorsi)
- Receiver (yang bertujuan untuk mendapatkan informasi)

The original 1948 Shannon Theory terdiri dari:

- Measurement of Information Entropy
- Source Coding Theory
- Channel Coding Theory

KANDUNGAN INFORMASI

Kandungan Informasi akan menyatakan penting atau tidaknya suatu informasi
Kandungan informasi akan berbanding terbalik dengan kepastian suatu informasi

$$I(s) = \log_2 \frac{1}{p(s)}$$

Satuannya **bits**

Sifat Kandungan Informasi I(s):

1) $I(s) \geq 0$
2) $I(s_1 s_2) = I(s_1) + I(s_2)$
3) $I(s)$ merupakan fungsi kontinyu dari peluang p
4) $I(s) = 0$ untuk $p(s) = 1$
5) $I(s_1) > I(s_2)$ jika $p(s_1) < p(s_2)$

ENTROPY

Entropy merupakan parameter yang menyatakan kandungan informasi rata-rata

$$H(X) = -\sum_{x} p(x)\log_2 p\,(x)$$

Contoh: Pada percobaan pelemparan dadu dimana :

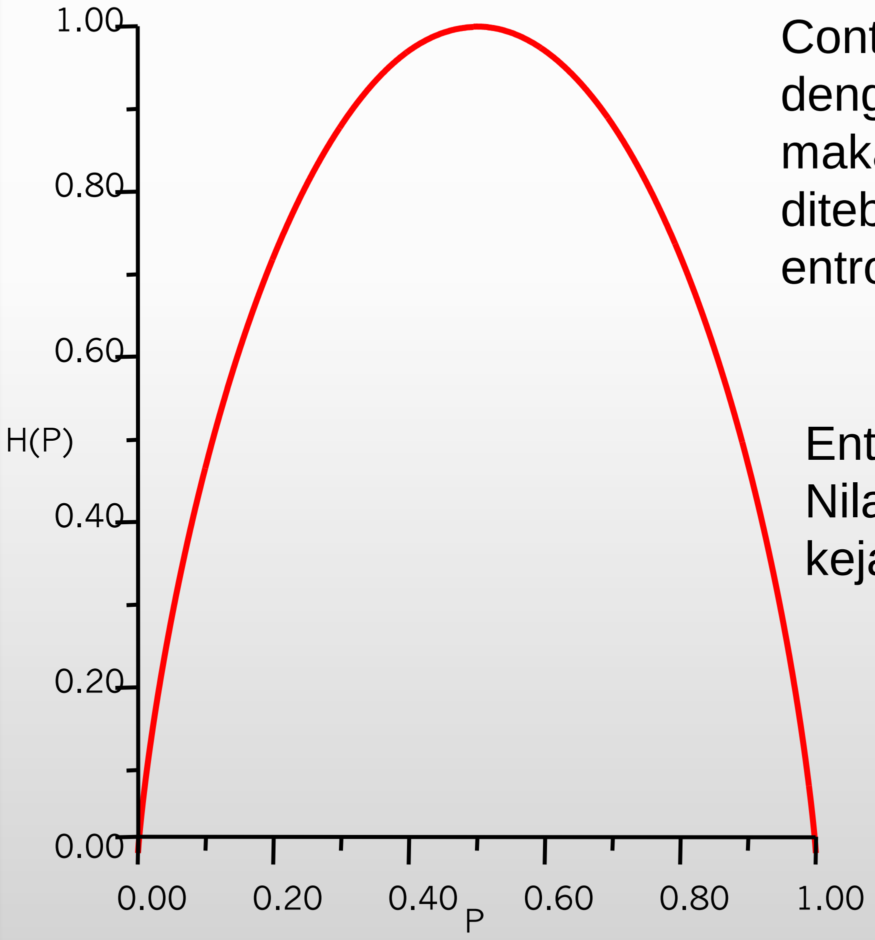
1) Keluarannya : 1, 2, 3, 4, 5, 6
2) Peluang masing-masing : 1/6

$$H = -\sum_{i=1}^{6} p(i)\log_2 p\,(i) = -\sum_{i=1}^{6} p(i)\log_2 p\,(i)$$

$$= -\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\log_2 \frac{1}{6} = \log_2 6 = 2.585 \text{ bits}$$

ENTROPY SUMBER MEMORYLESS BINARY

- Untuk sinyal biner (2 kemungkinan kejadian) dengan probabilitas kemunculan p dan1 –p, maka:



Contoh: untuk pelemparan uang logam dengan probabilitas yang sama (0,5), maka kejadian yang keluarakan susah ditebak (tidakpasti), sehingga nilai entropinya maksimum.

Entropi berkonotasi pada ketidakpastian. Nilai entropi akan maksimum apabila kejadian yang keluar semakin tidak pasti.

SHANNON FIRST THEOREM → source coding Theorem

Shannon menyatakan bahwa rata-rata akan dibutuhkan tidak kurang dari H(X) bits untuk merepresentasikan setiap data (X) yang dibangkitkan untuk menghasilkan informasi yang handal

Teorema source code menunjukkan bahwa tidak mungkin untuk mengompresi data sedemikian rupa sehingga code-rate (jumlah rata-rata bit per simbol) kurang dari entropi Shannon, Jika terjadi maka dipastikan bahwa informasi akan hilang. Namun dimungkinkan untuk mendapatkan code rate dekat dengan entropi Shannon, dengan probabilitas loss yang dapat diabaikan.

The source coding theorem for symbol codes places an upper and lower bound on the minimum expected length of the code word as a function of the entropy of the input word (which is viewed as a random variable) and the size of the target alphabet.

PERCOBAAB PELEMPARAN DADU

- Kemungkinan output dari pelemparan Dadu adalah: 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Dibutuhkan 3 bit untuk merepresentasikan output dari pelemparan Dadu.
- Bila dalam percobaan pelemparan dadu yang dilakukan sebanyak 1000 x, maka akan dibutuhkan sekitar 3000 bit untuk merepresentasikan seluruh output percobaan
- Bila hasil percobaan dinyatakan dalam ASCI maka akan dibutuhkan 8 bit untuk setiap output atau dibutuhkan total 8000 bit untuk 1000x percobaan

PERCOBAAN PELEMPARAN DADU (2)

- Shannon menyatakan bahwa kandungan informasi rata-rata pada setiap output adalah H(X) = 2.585 bits
- untuk 1000x percobaan, jumlah bit yang dibutuhkan untuk merepresentasikan semua outcomes dari percobaan adalah 2585 bits
- Shannon melakukan kompresi dengan ratio 2585/8000 = 32.3%

CONTOH (3)

- Hitung nilai entropi (nilai informasi rata-rata) dalam bit / karakter untuk abjad latin (26) huruf apabila :
  a. probabilitas kemunculan tiap huruf sama
  b. probabilitas kemunculan terdistribusi sebagai berikut :
     - p = 0,10 untuk huruf a, e, o, t
     - p = 0,07 untuk huruf h, i, n, r, s
     - p = 0,02 untuk huruf c, d, f,l, m, p, u, y, b
     - p = 0,01 untuk huruf lainnya

PANJANG & EFISIENSI SOURCE CODING

- Bila S merupakan Discrete Memoryless Source DMS memiliki entropi H(S) dan outcomes dari DMS ***S={s₁, s₂,.., s_q}*** dengan masing-masing probability ***p(sᵢ)=pᵢ*** *, (i=1, 2,…, q)*
- Codeword yang merupakan output dari Source Encoder X_i memiliki **panjang n_i bit**, maka **panjang code word rata-rata** didefinisikan:

$$L = \sum_{i=1}^{q} p(S_i).n_i$$

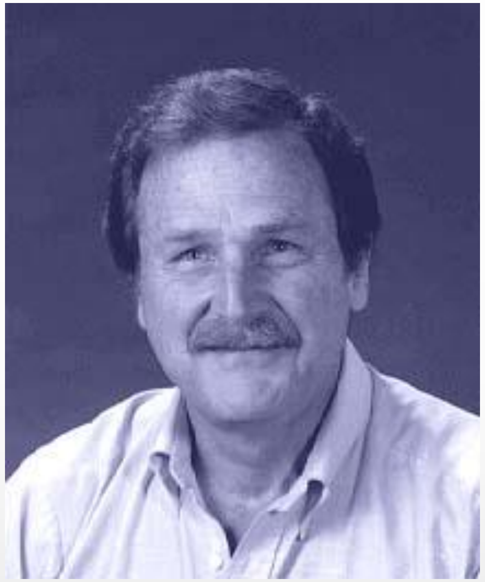
- Parameter L merepresentasikan jumlah bit per sumber simbol yang merupakan output dari Source Encoder
- Efisiensi dari codeword didefinisikan sebagai berikut:

$$\eta = {}^{L_{\min}}/_{L}$$

- $\boldsymbol{L_{min}}$ adalah nilai L minimum yang mungkin muncul. Apabila $\eta = 1$ maka kode dikatakan efisien.
- Sedangkan redundansi dari kode didefinisikan: $\gamma = 1 - \eta$

SEJARAH HUFFMAN CODE

- Akhir tahun 1952, David Huffman,
- Memperkenalkan suatu metode kompresi yang yang mampu mendekati ratio kompresi shannon
- Teknik pengkompresian ini dikenal dengan "Huffman code"



HUFFMAN CODE

- Secara sederhana algoritma pengkodean Huffman dapat dinyatakan dengan:
  - **Langkah 1**, Susun symbol berdasarkan probabilitas kemunculan, dengan urutan symbol yang memiliki probabilitas terbesar berada pada posisi teratas.
  - **Langkah 2**, dua symbol yang memiliki nilai terendah ditandai dengan 0 (untuk probabilitas yang lebih besar) dan 1 (untuk symbol dengan probabilitas yang lebih rendah),
  - **Langkah 3**, menjumlahkan probabilitas dua symbol terendah, dan susun ulang dengan urutan teratas adalah symbol dengan probabilitas terbesar.
  - **Langkah 4**, ulang langkah 2 dan 3 hingga probabilitas memiliki nilai sama dengan 1.

CONTOH

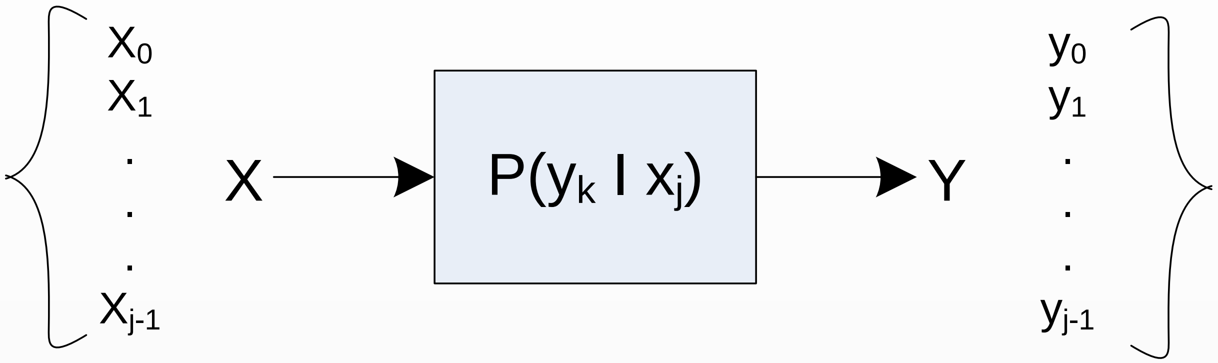
Symbol	Stg 1		Stg2		Stg3		Stg4	
S0	0.4		0.4		0.4		0.6	0
S1	0.2		0.2		0.4	0	0.4	1
S2	0.2		0.2	0	0.2	1		
S3	0.1	0	0.2	1				
S4	0.1	1						

Simbol	Peluang	Kode
S0	0.4	00
S1	0.2	10
S2	0.2	11
S3	0.1	010
S4	0.1	011

THE NOISY CHANNEL CODING THEOREM

- Teorema Shannon menyatakan bahwa dimungkinkan untuk mentransmisikan data digital pada kondisi nearly error-free hingga pada maximum rate yang ditentukan kanal pada kondidi kanal komunikasi yang terkontaminasi noise dengan level tertentu
- Dipresentasikan oleh Claude Shannon pada tahun 1948 dan sebagian didasarkan pada karya dan gagasan sebelumnya dari Harry Nyquist and Ralph Hartley.
- Teorema Shannon menyatakan bahwa pada noisy channel dengan kapasitas kanal, C dan informasi ditransmisikan pada laju R, maka jika R<C maka probabilitas error pada sisi penerima dimungkinkan sangat kecil. Hal ini menunjukkan , secara teoritis, adalah sangat mungkin untuk mengirimkan informasi hampir tanpa error pada laju data dibawah C.

DISCRETE MEMORYLESS CHANNEL (DMC)



- Merupakan pemodelan kanal dari DMS
- **X** adalah random variable untuk input dan **Y** output dari DMC
- Kanal disebut ‘Discrete’ karena sumber simbol yang dikirimkan dan output kanal adalah diskrit dan ukurannya terbatas
- Pemodelan input : $X = [x_0, x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_{J-1}]$
- Pemodelan output : $Y = [y_0, y_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_{K-1}]$

MATRIKS KANAL DMC

$$\begin{bmatrix} p(y_0) \\ p(y_1) \\ \\ \\ p(y_{k-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(y_0 \mid x_0), p(y_1 \mid x_0) & .... & p(y_{k-1} \mid x_0) \\ p(y_1 \mid x_1), p(y_1 \mid x_1) & .... & p(y_{k-1} \mid x_1) \\ & & \\ & & \\ p(y_0 \mid x_{j-1}), p(y_1 \mid x_{j-1}) & .... & p(y_{k-1} \mid x_{j-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \\ \\ p(x_{j-1}) \end{bmatrix}$$

Pb of output — channel matrix — priori Pb

- Matriks kanal menyatakan probabilitas transisi kanal :

  $\mathbf{P(y_k/x_j) = P[Y=y_k/X=x_j]}$ untuk semua j & k

- Umumnya : $0 \le P(y_k/x_j) \le 1$ untuk semua j dan k

- Untuk 1 baris yang sama berlaku: untuk setiap j

DMC

$P(x_j) = P[\ X = x_j\ ]$ merupakan probabilitas munculnya $X = x_j$ pada input kanal atau disebut juga ***"Apriori probability"***

"Joint Probability Distribution" dari random variable X dan Y

$$\boldsymbol{P(x_j,y_k) = P[X=x_j\,,Y=y_k]}$$
$$\boldsymbol{= P[Y=y_k/X=x_j]\ .\ P[X=x_j]}$$
$$\boldsymbol{= P[y_k/x_j]\ \ .\ P[x_j]}$$

"Marginal Probability Distribution" dari random variable Y :

$$P(y_k) = P(Y = y_k)$$
$$= \sum_{j=0}^{J-1} P(Y = y_k/X = x_j).P(X = x_j)$$
$$= \sum_{j=0}^{J-1} P(y_k/x_j).P(x_j)$$

MODEL KANAL : BSC (BINARY SYMMETRIC CHANNEL)

BSC kanal memiliki:

2 input : x_0=0 dan x_1=1 ➔ X

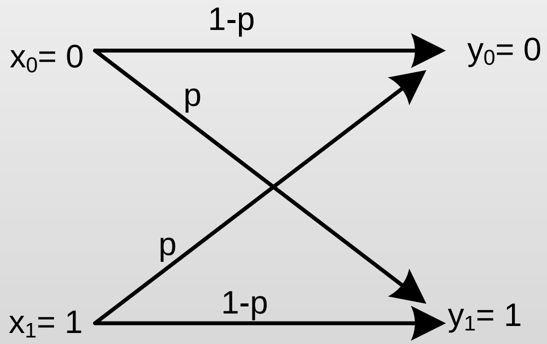
2 output : y_0=0 dan y_1=1 ➔ Y

Kanal disebut simetrik dikarenakan:

$$P(\, y_0 = 0 / x_1 = 1\,) = P(\, y_1 = 1 / x_0 = 0\,) = p$$

$$P(\, y_1 = 1 / x_1 = 1) = P(\, y_0 = 0 / x_0 = 0\,) = 1\text{-}p$$

Probabilitas error dinyatakan **p**, sehingga diagram probabilitas transisinya dapat dinyatakan dengan:



MUTUAL INFORMATION

H(X/Y) → conditional entropy dari input kanal bila output dari kanal sudah diobservasi.
H(Y/X) → conditional entropy dari output kanal bila input dari kanal sudah diobservasi.

$$H(X|Y) = \sum_{k=0}^{K-1} H(X|Y = y_k)\, p(y_k)$$

$$H(X|Y) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j|y_k) p(y_k)\ \log_2 \left[\frac{1}{p(x_j|y_k)}\right]$$

$$H(X|Y) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j, y_k)\ \log_2 \left[\frac{1}{p(x_j|y_k)}\right]$$

Mutual Information dinyatakan dengan

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$

MUTUAL INFORMATION

Mutual Information merepresentasikan kandungan informasi dari X apabila output kanal sudah diketahui ➔**I(X;Y)**

Properties of Mutual Information:

1) Mutual Informasi dari kanal bersifat simetris

$$I(X;Y) = I(Y;X)$$

$$I(X;Y) = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{J-1} p(x_j, y_k)\, log_2\left[\frac{p(y_k|x_j)}{p(y_k)}\right]$$

$$I(Y;X) = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(y_k, x_j)\, log_2\left[\frac{p(x_j|y_k)}{p(x_j)}\right]$$

2) Mutual Information selalu posistif $I(X;Y) \geq 0$

MUTUAL INFORMATION

3) Jika Joint entropy H (X,Y) didefinisikan sebagai:

$$H(X,Y)=\sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{K-1} p(x_j,y_k)\log_2\left(\frac{1}{p(x_j,y_k}\right)$$

Maka:

$$I(X\,;Y) = H(X) + H(Y) - H(X\,,Y)$$

KAPASITAS KANAL

Kapasitas kanal dari DMC merupakan nilai maksimum dari mutual informasi

$$C = \max I(X;Y)$$

Contoh kasus BSC Binary Simetric Channel
Jika $P(x_0) = P(x_1) = ½$, maka akan didapatkan.

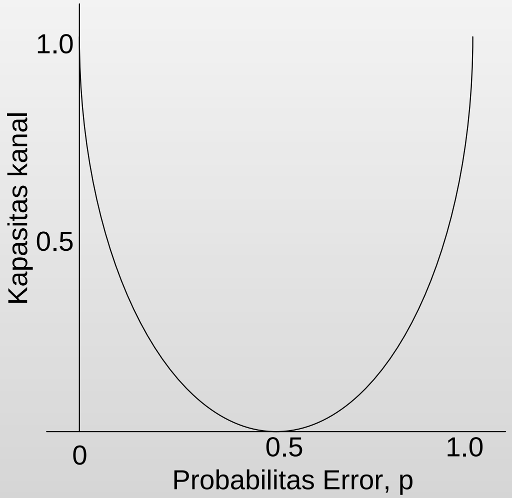
$$p(x_0, y_0) = p(y_0|x_0)p(x_0) = \frac{1}{2}(1-p) = p(x_1, y_1)$$

$$p(x_1, y_0) = p(y_0|x_1)p(x_1) = \frac{1}{2}p = p(x_0, y_1)$$

$$p(y_0) = \frac{1}{2} \qquad p(y_1) = \frac{1}{2}$$

$$I(X;Y) = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{J-1} p(x_j, y_k)\, log_2\left[\frac{p(y_k|x_j)}{p(y_k)}\right]$$

$$C = p\, log_2 2p + (1-p) log_2 2(1-p) = 1 - H(p)$$



KAPASITAS KANAL PADA DMC

- Jika DMS (Discrete Memoryless Source) S dengan dengan nilai entropy H(S) menghasilkan symbol setiap Ts detik. Dan jika Discrete Memoryless Channel (DMC) memiliki kapasitas kanal C dan dapat digunakan setiap Tc detik.
- jika:

$$\frac{H(S)}{T_s} \leq \frac{C}{T_c}$$

  - Maka akan terdapat skema pengkodean yang mana output source dapat dikirimkan ke kanal dan direkonstruksi dengan nilai probabilitas error yang kecil. Parameter C/Tc disebut sebagai critical rate.
- jika:

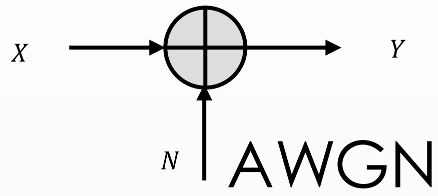
$$\frac{H(S)}{T_s} > \frac{C}{T_c}$$

  - Maka rekonstruksi dengan nilai probabilitas error yang kecil, tidak mungkin terjadi.
- Teorema kapasitas kanal C ini menjadi fundamental limits rate data agara memiliki kehandalan (error-free) pada kanal DMC.

KAPASITAS KANAL PADA AWGN CHANNEL

- Kapasitas pada kanal AWGN:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 B}\right) \quad \text{bps}$$



$$\frac{P}{N_0 B} = \frac{S}{N}$$

- Dimana:
  - C : kapasitas (bps)
  - B : bandwidth kanal (Hz)
  - No: PSD AWGN (W/Hz)
  - N : No.B , Daya Noise(W)
  - P : Daya sinhyal yang ditransmisikan(W)

- Formula tersebut didapat dari: $C = \max_{\{p(x_j)\}} I(X;Y)$

SHANNON LIMIT

- Shannon limit atau kapasitas Shannon dari suatukanal komunikasi adalah kecepatan transfer informasi maksimum teoretis dari kanal, pada level noise tertentu
- Kapasitas kanal: Kecepatan data maksimum yang bebas error.
- Kapasitas saluran pada saluran AWGN (teorema kapasitas Shannon-Hartley):

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) \quad \text{bps}$$

SHANNON LIMIT

- Teorema Shannon membatasi kecepatan transmisi data, bukan probabilitas error:
  - Secara teoritis dimungkin untuk mengirimkan informasi pada rate Rb, dimana Rb<C dengan probabilitas error yang kecil menggunakan skema pengkodean yang kompleks ,
  - Pada information rate Rb>C , tidak mungkin menemukan suatu kode yang dapat mencapai probabilitas yang sangat kecil.

SHANNON LIMIT

$$C = W \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

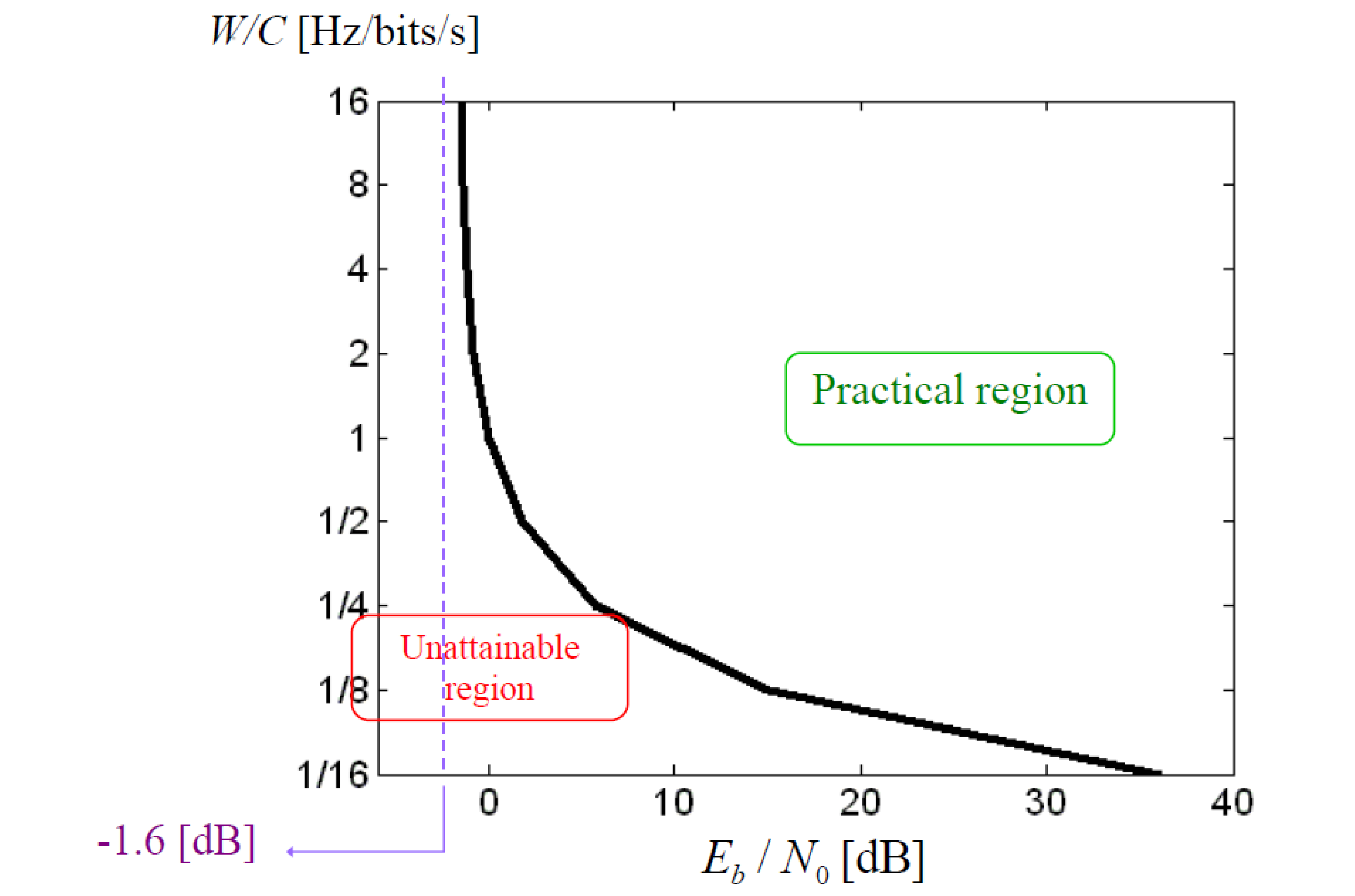
$$\begin{cases} S = E_b C \\ N = N_0 W \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{C}{W} = \log_2\left(1+\frac{E_b}{N_0}\frac{C}{W}\right)}$$

$$\text{As } W \to \infty \text{ or } \frac{C}{W} \to 0, \text{ we get :}$$

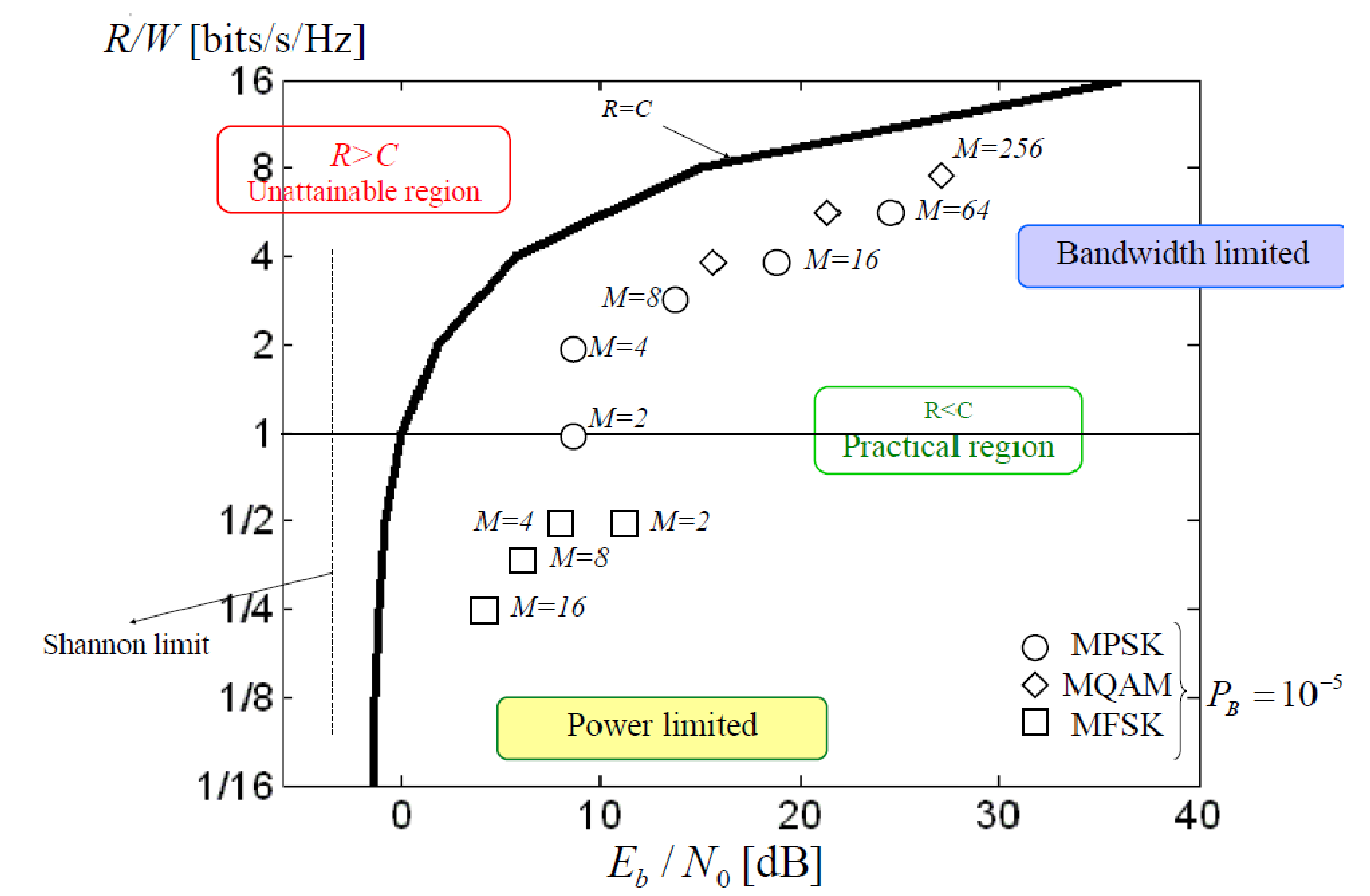
$$\frac{E_b}{N_0} \to \frac{1}{\log_2 e} = 0.693 \approx -1.6 \text{ [dB]} \longrightarrow \textbf{Shannon limit}$$

- Terdapat nilai batas yang tidak memungkinkan terjadinya komunikasi error free pada berapapun nilai information rate.
- Hanya dengan meningkatkan bandwidth saja, kapasitas Kanal tidak dapat ditingkatkan ke nilai yang diinginkan.

SHANNON LIMIT



BANDWIDTH EFFICIENCY PLANE



POWER & BANDWIDTH LIMITED SYSTEM

- Two major communication resources:
  - Transmit power and channel bandwidth
- In many communication systems, one of these resources is more precious than the other. Hence, systems can be classified as:
  - Power-limited systems:
    - save power at the expense of bandwidth (for example by using coding schemes)
  - Bandwidth-limited systems:
    - save bandwidth at the expense of power (for example by using spectrally efficient modulation schemes)

TUGAS

1. Suatu **sinyal biner** (bit 0 dan 1) dilewatkan ke **kanal komunikasi**, pada **SNR tertentu** menghasilkan peluang error **Pe** dan kanal bersifat **simetris**.
   a. Bila peluang muncul dikirim bit 1 = **80 %** dan bit 0 = **20 %** maka berapakah **kandungan informasi rata-rata** simbol di transmitter. Bila Pe = **10^{-4}, hitunglah nilai mutual informasinya**!
   b. Seperti point a). Bila peluang muncul dikirim bit 1 = **65 %** dan bit 0 = **35 %** , maka berapakah **kandungan informasi rata-rata** simbol di transmitter. Bila Pe = 0.5 x**10^{-3}, hitunglah nilai mutual informasinya**!
   c. Bila pada SNR = 16 dB memberikan Pe = **10^{-4}**, Berapakah besarnya ***Kapasitas Kanal komunikasi*** pada SNR tersebut !