

RANDOM PROCESS

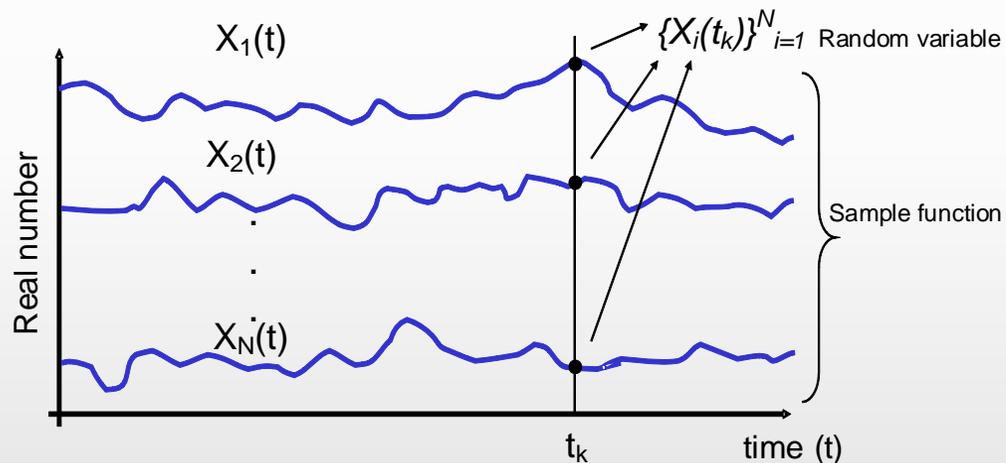
TTI3J3 Sistem
KOMUNIKASI II



OUTLINES

- Definisi random process, random variable
- Karakteristik Random process.
- Tipe stationary process.

DEFINISI RANDOM VARIABLE & RANDOM PROCESS



- Random variable:
 - output dari suatu percobaan random yang di-mapping ke suatu nilai tertentu
- Random Process:
 - output dari suatu percobaan random yang di-mapping-kan pada fungsi waktu tertentu.
 - kumpulan dari random variabel.
- Random process $X(t)$, dapat didefinisikan sebagai suatu kumpulan fungsi waktu dan probabilitas dari suatu event yang berhubungan dengan sample tertentu.

KARAKTERISTIK RANDOM PROCESS

- Stationary process:
 - berhubungan dengan dengan fenomena fisik yang stabil yang dikembangkan dari sifat steady state ,
 - Suatu random process dikatakan stationer, jika nilai dari random process tidak dipengaruhi oleh nilai sebelumnya.
- Non-stationary process:
 - berhubungan dengan fenomena yang bersifat tidak stabil
 - Dikatakan non stationer jika nilai random process pada suatu waktu dipengaruhi oleh nilai sebelumnya

KARAKTERISTIK RANDOM PROCESS

- Stationary process:
 - berhubungan dengan dengan fenomena fisik yang stabil yang dikembangkan dari sifat steady state ,
 - Suatu random process dikatakan stationer, jika nilai dari random process tidak dipengaruhi oleh nilai sebelumnya.
- Non-stationary process:
 - berhubungan dengan fenomena yang bersifat tidak stabil
 - Dikatakan non stationer jika nilai random process pada suatu waktu dipengaruhi oleh nilai sebelumnya

TIPE STATIONARY PROCESS



- Wide Sense Stationary (WSS)
 - Suatu random process dikatakan WSS, bila sifat statistiknya untuk nilai mean dan fungsi autokorelasi tidak berubah oleh pergeseran waktu.
- Strictly Sense Stationary (SSS)
 - Suatu random process, dikatakan strictly stationary jika tidak ada satupun dari sifat statistic random process yang dipengaruhi oleh pergeseran waktu
- Ergodic process
 - Suatu random process dikatakan memiliki sifat ergodik dalam mean jika nilai meannya bisa didekati dari nilai rata-rata fungsi waktunya dan
 - dikatakan ergodik dalam autokorelasinya jika nilai autokorelasi random process akan sama dengan nilai ekspektasi dari fungsi waktu autokorelasinya

MEAN

Mean dari random process $X(t)$ dinyatakan sebagai nilai ekspektasi dari variable random yang didapat pada saat observasi process random pada waktu t , ditunjukkan oleh persamaan berikut ini:

$$\mu_x(t) = E[X(t)]$$

$$\mu_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X(t)}(x)$$

Dengan $f_{X(t)}(x)$ adalah probability density function (pdf) dari random process $X(t)$.

AUTOKORELASI

Fungsi Autokorelasi dari random process dapat didefinisikan sebagai nilai ekspektasi dari hasil dua buah variable random, $X(t_1)$ dan $X(t_2)$ yang didapat pada saat observasi random process pada waktu t_1 dan t_2 . Fungsi autokorelasi dapat dituliskan sebagai berikut

$$R_x(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Pada random process yang bersifat strictly stationary fungsi autokorelasi hanya dipengaruhi selisih waktu antara t_1 dan t_2 dengan $t_2 = (t_1 + \tau)$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$$

SIFAT FUNGSI AUTOKORELASI

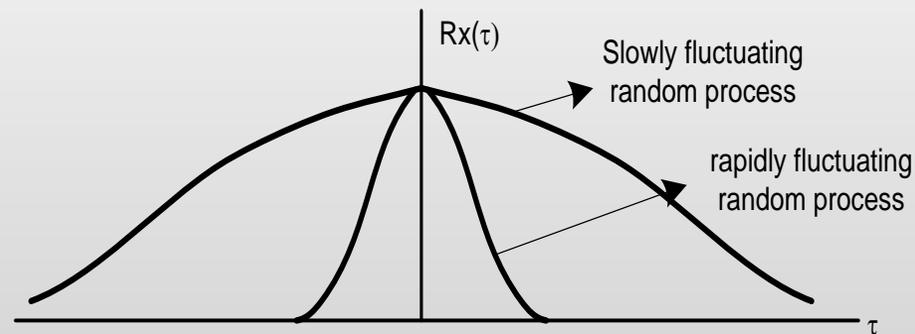
- Nilai mean square value dari random process merupakan nilai dari $R_x(\tau)$ pada saat $\tau=0$.

$$R_x(0) = E[X^2(t)]$$

- Fungsi autokorelasi merupakan fungsi genap

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

- Fungsi autokorelasi memiliki nilai maksimum pada saat $\tau=0$.



CONTOH SOAL

- Suatu random process $X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta)$ merupakan random variable yang terdistribusi uniform pada interval $[-\pi, \pi]$ dimana:

$$f_{\theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

- Tentukan nilai mean dan autokorelasi dari $X(t)$,

ERGODIC PROCESS

- Suatu proses random dikatakan ergodik pada mean bila nilai ekspektasi dari random proses sama dengan nilai rata-rata waktunya,
- Jika sample function $x(t)$ merupakan stationary process pada interval $-T \leq t \leq T$. Maka nilai rata-rata waktu $x(t)$ dapat dinyatakan :

$$\mu_x(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

- bila random process $x(t)$ dikatakan ergodik pada mean maka:

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \mu_x(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

ERGODIC PROCESS

- Suatu proses random dikatakan ergodik pada fungsi autokorelasi jika nilai fungsi waktu autokorelasinya untuk T menuju tak berhingga merupakan ekspektasi dari dua buah variable random, $X(t_1)$ dan $X(t_2)$ yang didapat pada saat observasi random process pada waktu t_1 dan t_2

- Fungsi waktu autokorelasi $x(t)$ saat interval $-T \leq t \leq T$ adalah:

$$R_x(\tau, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t)dt$$

- Jika $x(t)$ dikatakan ergodik pada fungsi autokorelasinya maka:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_x(\tau, T) = R_x(\tau)$$

POWER SPECTRAL DENSITY

- **Power Spectral Density $S_x(f)$** menyatakan kepadatan frekuensi dari daya rata-rata pada suatu random process $X(t)$ yang ditinjau pada frekuensi f .
- Power Spectral Density $S_x(f)$ dan fungsi autokorelasi $R_x(\tau)$ dari suatu stationary process $X(t)$ merupakan pasangan Transformasi Fourier, dimana:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

SIFAT PSD

- Nilai PSD dari suatu stationary process pada saat $f=0$ sama dengan luas daerah dari fungsi autokorelasi.

$$S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau$$

- Nilai mean square dari stationary process sama dengan luas total daerah PSD

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$$

- Nilai PSD dari suatu stationary process selalu positif

$$S_X(f) \geq 0 \text{ untuk semua } f$$

- Fungsi PSD merupakan fungsi genap

$$S_X(-f) = S_X(f)$$

- Probability density function merupakan nilai normalisasi dari nilai PSD

$$p_X(f) = \frac{S_X(f)}{\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df}$$

TUGAS I

- $s(t)$ adalah sinyal data digital acak murni dengan **bit rate R_b** yang direpresentasikan dengan NRZ bipolar $\pm V$ volt
 - Tentukan $R_{ss}(\tau)$ fungsi autokorelasi dari sinyal $s(t)$ tersebut dan gambarkan !
 - Tentukan $S_s(f)$ Power Spectral Density dari sinyal $s(t)$ tersebut dan gambarkan! Berapakah **FNBW** (First Null Band Width) !

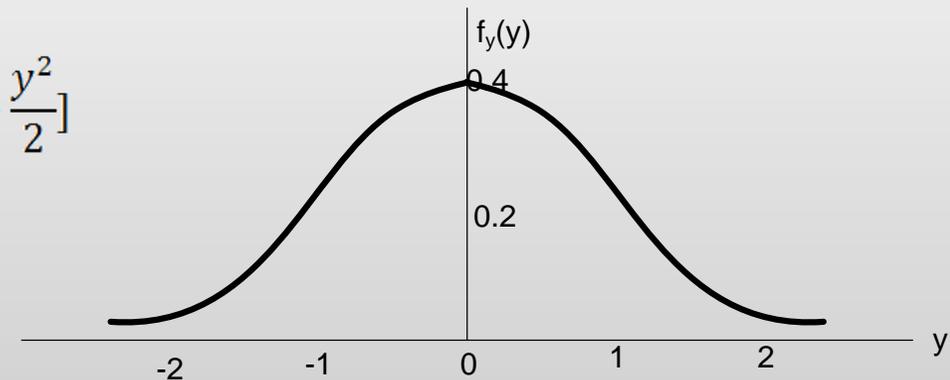
NOISE

- Noise didefinisikan sebagai sinyal yang tidak diinginkan, dan mengganggu proses transmisi dan pemrosesan sinyal pada system komunikasi.
- Sumber noise bisa berada diluar system ataupun dalam system.
- Thermal noise merupakan proses random yang terdistribusi Gaussian.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left[-\frac{(y - \mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]$$

- Kasus khusus untuk Gaussian random variable Y yang ternormalisasi dengan mean = 0 dan varian =1 maka:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right]$$

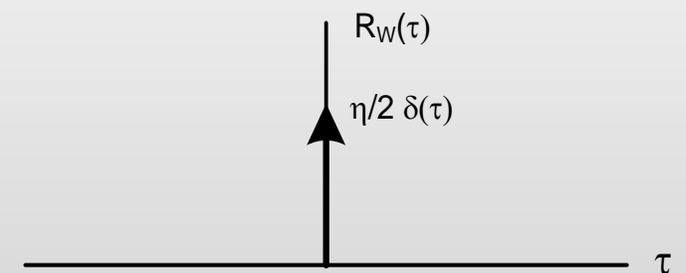
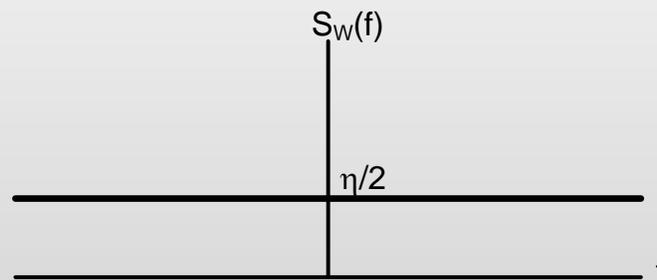


NOISE

Analisa noise pada system komunikasi, didasarkan pada bentuk ideal noise yang disebut dengan white noise. Power spectral density dari white noise adalah:

$$S_w(f) = \eta/2$$

Dimensi dari η adalah Watt/ Hertz. Parameter η dinyatakan dengan: $\eta = kT_e$



SISTEM LINEAR

- Sistem dapat diartikan sebagai suatu benda fisik yang memiliki output sinyal sebagai respon dari sinyal input.
- Sistem dapat dikarakteristikkan sebagai **system linear** atau **system non linear**, **system time invariant** atau time variant.
- Suatu **system dikatakan linear**, jika pada system berlaku sifat superposisi, dimana respon dari system linier jika dieksitasi dengan sejumlah proses secara bersamaan akan menghasilkan output yang sama dengan penjumlahan dari respon system jika dieksitasi secara individual.
- Dan suatu system dikatakan sebagai system time invariant (tak ubah waktu) jika pergeseran waktu pada proses eksitasi system akan menghasilkan respon system yang sama namun bergeser sesuai dengan pergeseran waktunya.

TRANSMISI RANDOM PROSES PADA SISTEM LINEAR TIME INVARIANT

- Hubungan sinyal output dan input pada sistem LTI dinyatakan dengan:

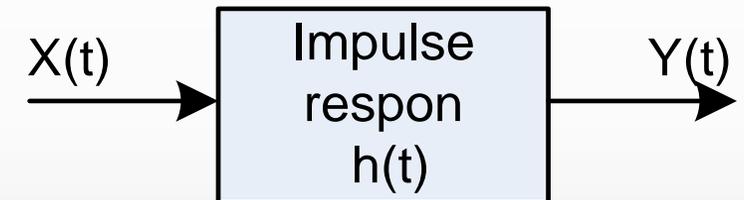
- Sinyal deterministic

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Random process

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$



RESPON FREKUENSI

- Fungsi transfer $H(f)$, merupakan sifat karakteristik dari system linear time invariant. Secara umum suatu fungsi kompleks dapat dinyatakan dengan:

$$H(f) = |H(f)| \exp j\beta(f)$$

- Dimana $|H(f)|$ merupakan respon amplitud dari system dan $\beta(f)$ merupakan respon fasa dari system.

IDEAL DISTORTIONLESS TRANSMISSION

- Pada system linear dan time invariant, distorsi linear menyebabkan tidak sempurnanya respon frekuensi dari system.
- Pada kondisi transmisi distortionless, maka sinyal output dari system dapat dikatakan merupakan replica dari sinyal input kecuali untuk nilai amplitude ataupun delay konstan. Sehingga dapat dikatakan sinyal $x(t)$ ditransmisikan melewati system tanpa distorsi jika output system $y(t)$ dinyatakan dengan:

$$y(t) = Kx(t - t_o)$$

- Respon Impuls sistem dinyatakan dengan:

$$h(t) = K \delta(t - t_o)$$

IDEAL DISTORTIONLESS TRANSMISSION

- Pada kondisi distortionless transmission, sistem harus memenuhi kondisi dimana:
 - Respon amplituda $|H(f)|$ harus constant untuk semua frekuensi yang ditunjukkan dengan:

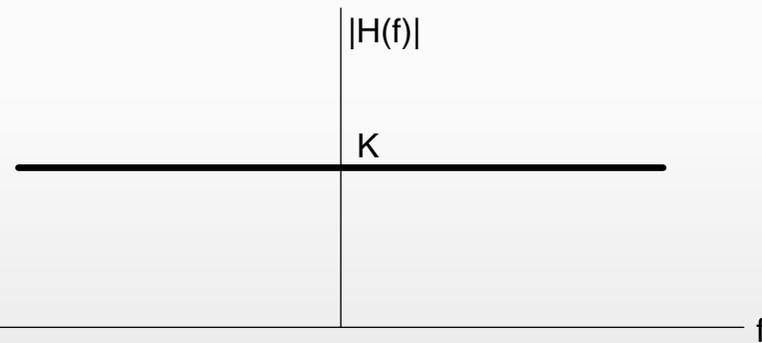
- $$|H(f)| = K$$

- Phasa $\beta(f)$ merupakan fungsi linear terhadap frekuensi dan melewati nol dimana

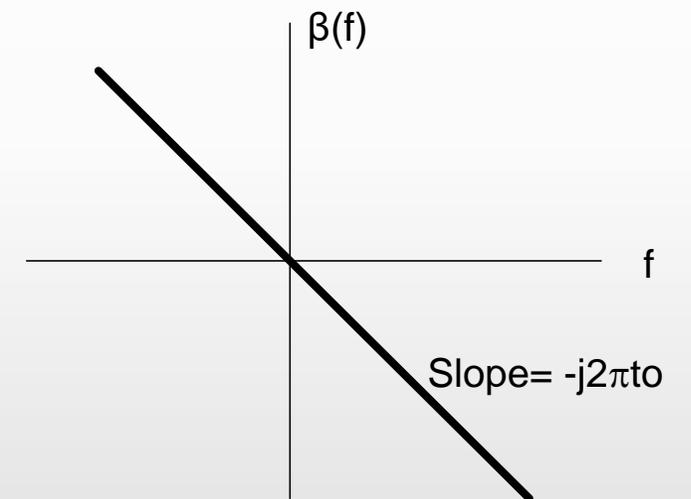
$$\beta(f) = -2\pi f t_o$$

RESPON AMPLITUDE DAN FASA

- Respon amplituda



- Respon Fasa

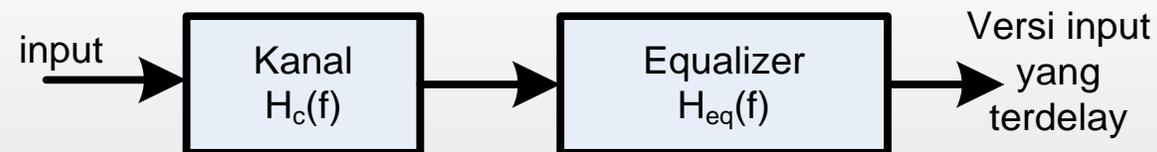


DISTORSI LINEAR

- Terdapat Dua komponen distorsi sinyal yaitu:
 - Saat respon amplitude $|H(f)|$ dari system tidak constant pada range frekuensi yang diinginkan, dimana sinyal input ditransmisikan dengan sejumlah gain yang berbeda. Efek ini disebut sebagai distorsi amplitude
 - Komponen distorsi yang kedua terjadi saat respon fasa dari system tidak linear terhadap frekuensi. Sehingga jika sinyal dibagi dalam satu set komponen, dimana setiap sinyal terdiri dari narrowband frekuensi, maka akan terlihat setiap sinyal ini terdelay dengan waktu yang berbeda-beda saat ditransmisikan melewati system. Bentuk distorsi ini disebut sebagai distorsi fasa atau distorsi delay.
- Terdapat perbedaan antara delay konstan dan pergeseran fasa konstan. Delay konstan merupakan syarat dari transmisi distortionless, sedangkan pergeseran fasa konstan akan menyebabkan distorsi pada sinyal.

EKUALISASI

- Untuk mengkompensasi keberadaan distorsi linear, maka digunakan equalizer yang terhubung kaskade dengan system. Equalizer ini didesign dengan memperhatikan daerah frekuensi yang diinginkan dimana keseluruhan dari respon amplitudo dan respon fasa dari hubungan kaskade kanal dan equalizer akan mendekati kondisi transmisi yang bersifat distortionless.



$$H_c(f)H_{eq}(f) = K \exp(-j2\pi f t_o)$$

$$H_{eq}(f) = \frac{K \exp(-j2\pi f t_o)}{H_c(f)}$$

DISTORSI LINEAR

- Terdapat Dua komponen distorsi sinyal yaitu:
 - Saat respon amplitude $|H(f)|$ dari system tidak constant pada range frekuensi yang diinginkan, dimana sinyal input ditransmisikan dengan sejumlah gain yang berbeda. Efek ini disebut sebagai distorsi amplitude
 - Komponen distorsi yang kedua terjadi saat respon fasa dari system tidak linear terhadap frekuensi. Sehingga jika sinyal dibagi dalam satu set komponen, dimana setiap sinyal terdiri dari narrowband frekuensi, maka akan terlihat setiap sinyal ini terdelay dengan waktu yang berbeda-beda saat ditransmisikan melewati system. Bentuk distorsi ini disebut sebagai distorsi fasa atau distorsi delay.
- Terdapat perbedaan antara delay konstan dan pergeseran fasa konstan. Delay konstan merupakan syarat dari transmisi distortionless, sedangkan pergeseran fasa konstan akan menyebabkan distorsi pada sinyal.

TERIMA KASIH